



**UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE**

**MESTRADO EM ENGENHARIA ELÉTRICA**

**Algumas Propriedades de Autômatos Celulares  
Unidimensionais Conservativos e Reversíveis**

Angelo Schranko de Oliveira

Texto de dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como requisito das exigências do exame para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

**Orientador: Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira**

São Paulo

Dezembro / 2008

## **Banca Examinadora**

---

Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

Orientador

Universidade Presbiteriana Mackenzie

---

Dr. Elbert Einstein Nehrer Macau

Examinador Externo

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

---

Dr. Leandro Nunes de Castro

Examinador Interno

Universidade Presbiteriana Mackenzie

## **Dedicatória**

Aos que enxergam um universo num cair de uma gota d'água – e se maravilham com isso.

À minha querida noiva, Memi, por seu amor, carinho, compreensão e ajuda, sem os quais o desenvolvimento do presente trabalho teria sido consideravelmente mais árduo.

À toda minha família e, em particular, à minha querida mãe, Expedita Maria – meu grande exemplo de persistência e de luta – por sempre acreditar e confiar incondicionalmente em mim, e, com sua simplicidade, jamais ter me questionado sobre o que tanto eu fazia por de trás dos meus cálculos e livros desde sempre, ou até mesmo quando eu tentara observar o Halley (com sucesso), aos meus 6 anos de idade.

**“A Filosofia está escrita nesse grande livro – o Universo –  
que permanece continuamente aberto.”**

**Galileo Galilei**

## Agradecimentos

À Universidade Presbiteriana Mackenzie, por sua vocação ao ensino e à pesquisa em nossa sociedade.

Aos pesquisadores referenciados, pois suas obras foram de fundamental importância para o desenvolvimento desta pesquisa.

Aos familiares, amigos e todos aqueles que me acompanharam de forma direta ou indireta no desenvolvimento do presente trabalho.

Em particular e especialmente ao professor **Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira**, que conduziu-me ao mundo da pesquisa científica e me orientou de forma exemplar. Por suas inúmeras revisões, sugestões, correções, críticas e elogios, os quais foram indispensáveis à minha formação. Sou-lhe imensamente grato.

Aos meus colegas Paulo Florêncio e Rogério Ywassa, por sua importante colaboração na produção de um artigo que foi apresentado no Workshop AUTOMATA 2008, em Bristol, Reino Unido, e que deu origem a uma outra versão, [Schranko e de Oliveira, 2009], anexa a este documento, aceita para o *Journal of Cellular Automata*.

À Coordenadoria de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela bolsa de estudos a mim concedida. Ao Fundo Mackenzie de Pesquisa (MackPesquisa) pelo apoio financeiro que me permitiu apresentar os primeiros resultados deste trabalho em evento internacional. À FAPESP, pelo apoio financeiro através do projeto de pesquisa Processo 2005/04696-3, à Wolfram Research, através do *Mathematica Academic Grant* 1149, e novamente ao MackPesquisa, por projeto de pesquisa através do Edital 2007, todos concedidos a meu orientador. Meus sinceros agradecimentos.

## Sumário

Resumo .....	6
Abstract .....	7
Capítulo 1: Introdução .....	8
Capítulo 2: Autômatos Celulares .....	10
2.1 Autômatos Celulares e Leis de Conservação .....	13
2.2 Autômatos Celulares e Reversibilidade .....	15
Capítulo 3: Relações entre Autômatos Celulares Unidimensionais Reversíveis e as Pré- Imagens de seus Blocos Básicos .....	19
3.1 Definições .....	19
3.2 O Parâmetro $\alpha$ de Caracterização Dinâmica .....	19
Capítulo 4: Autômatos Celulares Conservativos e Reversíveis .....	26
Capítulo 5: Algumas Relações entre Autômatos Celulares Lineares e Autômatos Celulares Conservativos e Reversíveis .....	31
Capítulo 6: Dinâmica dos Autômatos Celulares Conservativos e Reversíveis .....	36
Capítulo 7: Considerações Finais .....	43
Referências Bibliográficas .....	45
Apêndice I .....	50

## Resumo

Autômatos celulares (ACs) podem ser definidos como sistemas dinâmicos sobre redes  $n$ -dimensionais de componentes localmente conectados, cuja evolução ocorre de forma discreta, síncrona e homogênea. Dentre suas diversas aplicações, têm sido utilizados como ferramenta para modelagem de sistemas complexos regidos por leis fundamentais de conservação (autômatos celulares conservativos) ou reversibilidade (autômatos celulares reversíveis). Outra propriedade fundamental que pode ser observada nos ACs diz respeito à sua linearidade (autômatos celulares lineares) ou não-linearidade. Fenômenos lineares normalmente apresentam menor complexidade dinâmica, enquanto fenômenos não-lineares podem apresentar propriedades tais como sensibilidade às condições iniciais e rotas para caos. O presente trabalho concentra-se na investigação de propriedades de autômatos celulares unidimensionais pertencentes à interseção dessas quatro classes, isto é, autômatos celulares unidimensionais conservativos, reversíveis, e lineares ou não-lineares. Após definições básicas, são revisitados os conceitos de conservabilidade e reversibilidade. Em seguida, introduz-se um parâmetro de caracterização dinâmica que relaciona a distribuição do número de pré-imagens dos blocos básicos à reversibilidade de autômatos celulares unidimensionais e apresentam-se algumas demonstrações de suas propriedades gerais. Observações empíricas aqui realizadas sugerem que um autômato celular unidimensional é conservativo e reversível se, e somente se, sua função local de transição de estados é uma composição das funções locais de transição de estado dos autômatos celulares conservativos e reversíveis de vizinhança de comprimento  $n=2$ ; tal observação foi constatada para vizinhanças de comprimento  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  e quantidade de estados  $q=2$ ;  $n \in \{2, 3\}$  e  $q=3$ ;  $n \in \{2, 3\}$  e  $q=4$ . Uma demonstração para tal conjectura permitiria estabelecer uma enumeração entre os comprimentos das vizinhanças e a quantidade de autômatos celulares unidimensionais conservativos e reversíveis no espaço correspondente, os quais podem ser facilmente identificados através do cálculo das composições das funções locais de transição de estados com  $n=2$ . Por fim, apresentam-se relações entre as classes dos ACs conservativos, reversíveis, lineares e não-lineares, suas dinâmicas espaço-temporais e campos de bacias de atração.

**Palavras-chave:** Autômato celular; conservabilidade; reversibilidade; não-linearidade; sistema dinâmico discreto; NKS.

## Abstract

Cellular automata (CAs) can be defined as discrete dynamical systems over  $n$ -dimensional networks of locally connected components, whose evolution occur in a discrete, synchronous and homogeneous fashion. Among their several applications, they have been used as a tool for complex systems modeling governed by fundamental laws of conservation (number-conserving cellular automata) or reversibility (reversible cellular automata). Another fundamental property that can be observed in CAs is regarding to their linearity (linear cellular automata) or nonlinearity. Usually, linear phenomena present low dynamic complexity, however, nonlinear phenoma can present complex behaviours like sensitive dependence on initial conditions and routes to chaos. This work focuses on investigating properties of cellular automata belonging to the intersection of those four classes, namely, reversible, number-conserving, and linear or nonlinear cellular automata. After presenting basic definitions, the notions of number-conserving cellular automata, conservation degree and reversibility are reviewed. Following, a dynamical characterisation parameter which relates the reversibility property of a one-dimensional cellular automaton and the pre-images of their basic blocks is introduced, and some proofs of its general properties are given. Empirical observations herein suggest that a cellular automaton is reversible and number-conserving if, and only if, its local transition function is a composition of the local transition functions of the reversible, number-conserving cellular automata with neighbourhood size  $n=2$ ; such an observation was drawn for neighbourhood sizes  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  and number of states  $q=2$ ;  $n \in \{2, 3\}$  and  $q=3$ ;  $n \in \{2, 3\}$  and  $q=4$ . A proof for such a conjecture would allow the enumeration between neighbourhood lengths and the quantity of reversible, number-conserving cellular automata in the corresponding space, which can be easily identified by working out the compositions of the local transition functions with  $n=2$ . Finally, some relationships between reversible, number-conserving, linear and nonlinear CA rules, their spatio-temporal diagrams and basin of attraction fields are presented.

**Keywords:** Cellular automaton; conservativity; reversibility; nonlinearity; discrete dynamical system; NKS.

## Capítulo 1: Introdução

Autômatos celulares (ACs) estão entre os primeiros modelos de computação natural, introduzidos por John von Neumann e Stanislaw Ulam, ao final da década de 40, com intuito de se projetar um mecanismo artificial auto-replicante e computacionalmente universal [Burks, 1970]. Sua arquitetura massivamente paralela e de processamento local é particularmente útil na modelagem de sistemas complexos, onde podem-se observar fenômenos emergentes como auto-organização e formação de padrões [Wuensche e Lesser, 1992]. ACs podem também ser definidos de tal forma que satisfaçam certas leis de conservação [Boccara e Fukś, 2002], reversibilidade [Margolus, 1984] ou ambas, tornando-se assim úteis na modelagem de sistemas naturais que apresentam tais propriedades.

O presente trabalho investiga propriedades de ACs conservativos (no sentido apresentado por Boccara e Fukś [2002]) e reversíveis (ACCRs). A seguir, no Capítulo 2, apresentam-se as definições básicas ao desenvolvimento dos capítulos posteriores. Introduce-se o conceito de leis de conservação no contexto dos ACs e apresentam-se alguns dos principais resultados relacionados à decibilidade e dinâmica. Também é introduzida a classe dos ACs reversíveis, onde apresentam-se de forma breve alguns dos principais conceitos e resultados históricos. Em seguida, no Capítulo 3, introduz-se um parâmetro de caracterização dinâmica que relaciona ACs unidimensionais reversíveis às pré-imagens de seus blocos básicos e demonstram-se algumas de suas propriedades fundamentais. No Capítulo 4, investigam-se propriedades relacionadas aos ACCRs unidimensionais. Baseando-se nas composições das funções de transição de estado para  $n=2$ , verificou-se empiricamente, através de buscas exaustivas, que se um AC unidimensional é reversível e conservativo, então sua função de transição de estados é uma composição como a definida acima. O Capítulo 5 apresenta relações entre as classes dos ACs conservativos, ACs reversíveis e ACs lineares, apresentando como se dá a interseção destas classes e demonstrando um teorema relacionado à natureza dos ACCRs não-lineares, bem como as diferenças fundamentais entre os diagramas espaço-temporais dos ACCRs lineares e não-lineares. O Capítulo 6 fornece uma análise da complexidade dos ACs, baseada em características apresentadas em seus diagramas espaço-temporais e campos de bacias de atração. Finalmente, no Capítulo 7, apresentam-se as conclusões da presente pesquisa, bem como questões em aberto e possíveis extensões.

Esta dissertação iniciou-se com investigações a respeito de uma definição e interpretação para uma grandeza capaz de medir o grau de conservabilidade de ACs unidimensionais. O artigo resultante destas investigações [Schranks *et al*, 2008] foi apresentado no Workshop AUTOMATA 2008 (Bristol, UK) e deu origem a uma outra versão, [Schranks e de Oliveira, 2009], que foi aceita para o *Jornal of Cellular Automata*, e encontra-se atualmente no prelo. Paralelamente, diversas hipóteses relacionadas à classe dos ACCRs foram levantadas e demonstradas, incluindo a definição do parâmetro  $\alpha$ , diretamente relacionado à classe mais geral dos AC reversíveis e, portanto, também aos ACCRs. Decidiu-se então, que este trabalho seria baseado no desenvolvimento de tais idéias e, posteriormente, um novo artigo com base em tais resultados seria confeccionado e submetido. Dessa forma, incluiu-se o texto [Schranks e de Oliveira, 2009] como Apêndice I. Contudo, vale ressaltar que ambos os textos



são independentes e não se esgotam em si mesmos, pois além das referências apresentadas, há também diversas questões em aberto em ambos os trabalhos.

## Capítulo 2: Autômatos Celulares

ACs são sistemas dinâmicos completamente discretos, isto é, tanto sua composição espacial quanto sua evolução temporal e variáveis de estado se dão em domínios discretos. Todo processamento é distribuído, de modo que as computações ocorrem localmente e sem a presença de uma unidade central de processamento ou mecanismos de armazenamento [Wolfram, 1994]. Basicamente, são constituídos por um conjunto de células, dispostas lado a lado em uma grade regular  $n$ -dimensional, onde cada célula possui um número finito de estados. A dinâmica de sua evolução espaço-temporal é determinada através de uma função de transição de estados, a qual leva em consideração os estados de uma dada célula e o de outras na sua vizinhança em um dado instante de tempo. Assim, o estado da célula de posição  $i$  no instante  $t$  é dado por  $c(i, t)$  e seu novo estado após uma iteração é dado por  $c(i, t+1)$ , conforme a Figura 1.

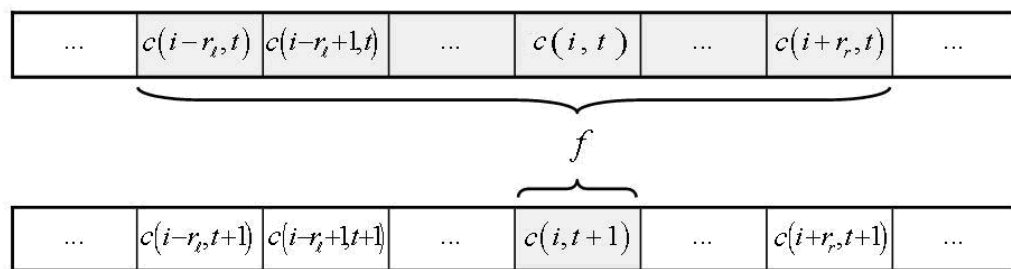


Figura 1. Evolução local de um AC unidimensional de vizinhança de comprimento  $n = r_\ell + r_r + 1$ .

Dessa forma, sendo  $\mathbb{Z}$  o conjunto dos números inteiros e  $\mathbb{N}$  o conjunto dos números inteiros não negativos, a dinâmica local dos ACs é definida pela função (ou regra) de transição de estados  $f: S^n \rightarrow S$ , onde  $n = r_\ell + r_r + 1$ , e  $r_\ell, r_r \in \mathbb{Z}_+$  são, respectivamente, os raios à esquerda e à direita da regra considerada, resultando numa regra de  $n$ -entradas. Um estado é dito quiescente se satisfaz  $f(q, q, \dots, q) = q, q \in \mathbb{N}$ . Portanto, formalmente, ACs unidimensionais podem ser definidos [Boccaro e Fukás, 2002] a partir de uma função  $c: \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \rightarrow S$  que satisfaz:

$$c(i, t+1) = f(c(i - r_\ell, t), c(i - r_\ell + 1, t), \dots, c(i + r_r, t)) \quad (1)$$

onde  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{N}$  representa um conjunto finito de estados, sendo que, para todo  $i \in \mathbb{Z}$ ,  $t \in \mathbb{N}$ .

De forma geral é possível definir um vetor ( $n$ -dimensional) de vizinhança  $N$ , onde cada coordenada determina a posição relativa das células consideradas pela função local de transição de estados. Por exemplo, considerando-se  $N = (0, 1, 2)$ , a função local de transição de estados será em função do estado das células nas posições  $i+0$ ,  $i+1$  e  $i+2$ , ou seja, serão considerados os estados tanto da própria célula quanto das duas outras células imediatamente à direita, o que equivale a definir  $r_l = 0$  e  $r_r = 2$ . Note-se que  $N$  permite definir posições relativas não-consecutivas, isto é, vizinhança não-locais (daí sua generalidade), onde o conceito de raio não é aplicável. Variações nas coordenadas  $N$  para um mesmo AC podem implicar em alterações qualitativas em sua dinâmica espaço-temporal [Nishio, 2006], contudo, certas propriedades tais como reversibilidade, são invariantes com relação a permutações das coordenadas de  $N$ .

Para cada função local de transição  $f$  é possível associar biunivocamente um número  $W(f) \in \mathbb{Z}_+$ , usualmente denominado número da regra do AC [2], tal que:

$$W(f) = \sum_{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) q^{q^{n-1}x_1 + q^{n-2}x_2 + \dots + q^0x_n} \quad (2)$$

Como exemplo, considere-se a regra de número 30, com  $S = \{0, 1\}$  e  $n = 3$ . Sua representação binária é dada por  $00011110_2$ , fazendo com que sua função local de transição de estado seja definida por:

$$\begin{aligned} f(0,0,0) &= 0, f(0,0,1) = 1, f(0,1,0) = 1, f(0,1,1) = 1 \\ f(1,0,0) &= 1, f(1,0,1) = 0, f(1,1,0) = 0, f(1,1,1) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

Uma configuração é qualquer elemento  $C \in S^{\mathbb{Z}}$  e o conjunto de todas as configurações é representado por  $\mathcal{C}$ . Dessa forma, a função global de transição de estados  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  associa cada elemento  $C \in \mathcal{C}$  a um outro elemento do mesmo conjunto, através da aplicação da função local de transição de estados a todas as vizinhanças da configuração considerada. Como exemplo, a Figura 2 apresenta a aplicação da função global de transição de estados da regra de número 30 a uma configuração de comprimento finito. Neste trabalho são considerados apenas ACs unidimensionais de comprimento finito, donde substitui-se  $S^{\mathbb{Z}}$  por  $S^L$ ,  $L \in \mathbb{Z}_+$  sendo o comprimento da configuração. Dessa forma, um AC pode ser representado pela tripla  $(S, N, f)$ .

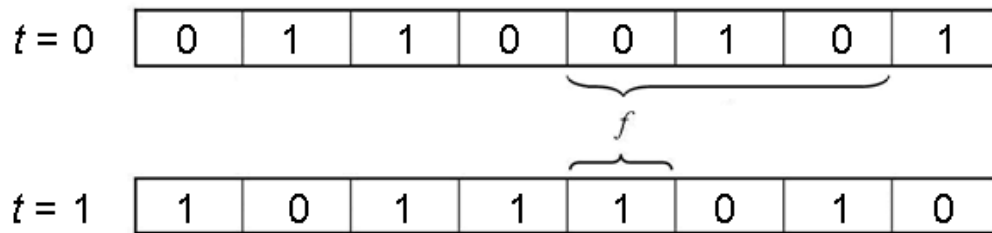


Figura 2. Aplicação da função global de transição referente à regra 30, considerando-se  $S = \{0, 1\}$ ,  $N = (0, 1, 2)$  e configuração inicial 01100101.

Na Figura 2, observa-se a configuração inicial ( $t = 0$ ) dada por 01100101 e, após uma iteração (aplicação da função global de transição), obtém-se 10111010. A transição  $010 \rightarrow 1$  é parte da definição da função local de transição de estados da regra 30, conforme apresentado em (3). A aplicação da função local de transição ocorre de forma síncrona e paralela em todas as vizinhanças. Além disso, uma vez tratando-se de configurações de comprimento finito e dada a homogeneidade dos ACs, pode-se definir uma ‘condição de contorno periódica’ de tal forma que, considerando  $N = (0, 1, 2)$  por exemplo, a aplicação da função local de transição à célula da extrema direita (a última) do reticulado leva em consideração a vizinhança formada por esta, pela primeira e pela segunda células respectivamente. Assim, na Figura 2, observa-se que na configuração inicial (isto é, em  $t = 0$ ) a última célula tem estado igual a 1 e a célula de mesma posição na próxima iteração tem estado igual a 0. Isso ocorre pois  $101 \rightarrow 1$ , conforme a definição da regra 30 (3).

Representa-se o espaço elementar de regras pela tripla  $(S, N, f)$ , onde  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (-1, 0, 1)$ . Com isso enumeram-se  $2^8$  regras distintas, pois cada uma das  $2^3$  vizinhanças são mapeadas a 2 estados. Entretanto, após a aplicação dos operadores de conjugação  $C$  e reflexão  $R$ , conforme definidos em (4) e explicados a seguir, verifica-se o particionamento do espaço elementar de regras em 88 classes de equivalências dinâmicas, onde regras dinamicamente equivalentes pertencem a uma mesma classe [Wolfram, 1994].

$$\begin{aligned}
 Cf(x_1, x_2, \dots, x_n) &= q - 1 - f(q - 1 - x_1, q - 1 - x_2, \dots, q - 1 - x_n) \\
 Rf(x_1, x_2, \dots, x_n) &= f(x_1, x_2, \dots, x_n)
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

De fato, regras de uma mesma classe de equivalência dinâmica – induzida a partir da aplicação do operador de conjugação, do operador de reflexão, ou da composição entre eles – são qualitativamente equivalentes, como ilustra a Figura 3. Dessa forma, parâmetros de caracterização

dinâmica que sejam definidos devem ser numericamente iguais quando aplicados a tais regras [Oliveira *et al*, 2001].

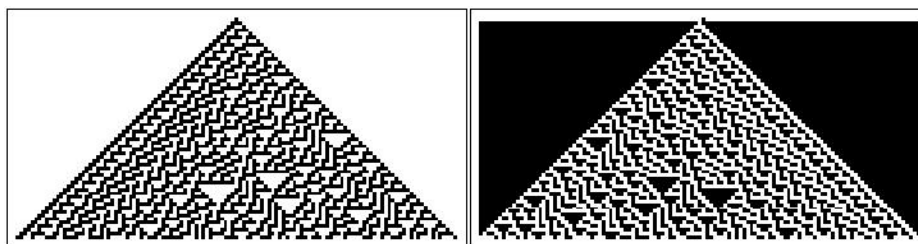


Figura 3. Diagramas espaço-temporais das regras 30 e 149.

Na Figura 3, observam-se os diagramas espaço-temporais das regras 30 e 149, respectivamente. Nota-se que seus diagramas espaço-temporais são qualitativamente equivalentes. De fato, a regra 149 nada mais é que o resultado da aplicação dos operadores  $C$  e  $R$  à regra 30, equivalendo-se portanto à troca de estados  $\{0 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 0\}$ , seguida por uma rotação de 180 graus em relação ao eixo das ordenadas (i.e. espelhamento). Vale notar também que os operadores  $C$  e  $R$  comutam, ou seja:  $C \circ R(f) = R \circ C(f)$ . Neste trabalho a operação de composição de funções é denotada pelo operador ‘bola’, isto é:  $\circ$ . Ainda com relação à dinâmica espaço-temporal dos ACs, Wolfram propôs uma classificação informal baseada na análise dos diagramas espaço-temporais e em conceitos advindos da teoria dos sistemas dinâmicos, tais como pontos-fixos, ciclos periódicos e transientes [Wolfram, 1994]. Segundo Wolfram, na Classe-I, quase todas as configurações iniciais convergem para a um ponto-fixo homogêneo (por exemplo, todas as células no estado 0). Já na Classe-II, as configurações iniciais tipicamente convergem para algum ponto-fixo ou algum ciclo periódico de configurações. Já na Classe-III as configurações iniciais usualmente resultam em um comportamento caótico e, finalmente, na Classe-IV, algumas configurações iniciais podem resultar em estruturas complexas duradouras, possivelmente periódicas no limite, mas com longos transientes.

## 2.1 Autômatos Celulares e Leis de Conservação

Observam-se leis de conservação em muitos sistemas naturais, tais como sistemas mecânicos (conservação de massa e momento), sistemas químicos (conservação de matéria) e, de forma geral, conservação de energia. Idealmente, ACs como modelos de fenômenos naturais conservativos devem apresentar comportamento equivalente a tais fenômenos, isto é, devem ser regidos por certas leis de conservação. Hattori e Takesue [1991] introduziram o conceito de conservação de quantidades aditivas, onde as invariantes nas iterações dos ACs estão relacionadas a somas de valores numéricos

locais. Uma das formas mais conhecidas de leis de conservação em ACs foi introduzida por Boccara e Fuk s [2002], onde a invariante   dada pela somatória dos estados das células, isto  , a soma dos estados de cada configura o permanece constante durante a evolu o do sistema. Por exemplo, a itera o de qualquer regra conservativa (segundo Boccara e Fuk s) considerando-se a configura o inicial 1001110110, resulta numa permuta o da mesma, pois a soma dos seus estados   preservada. De fato, tal propriedade   válida para qualquer configura o inicial e qualquer número de itera es; contudo, a densidade de estados (considerando  $q > 2$ ) não   necessariamente preservada, pois, por exemplo, após uma itera o da regra de número 6772834745301, com  $q=3$  e  $N=(-1, 0, 1)$ , a configura o inicial 102212100 resulta em 011121201, ambas com a mesma soma (valor 9) de estados, mas densidades distintas de cada estado. ACs que satisfazem as condi es de Boccara-Fuk s são denominados ACs conservadores de quantidades (*number-conserving cellular automata*), ou simplesmente ACs conservativos (ACCs). O presente trabalho considera apenas ACCs no sentido de Boccara-Fuk s, isto  , aqueles que,  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$ , a fun o local de transi o de estados satisfaz:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (f(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, x_2, x_3, \dots, x_{n-k+1}) - f(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_k, x_1, x_2, \dots, x_{n-k})) \quad (5)$$

Como exemplo, considere-se a regra 184 do espaço elementar. As condi es de Boccara-Fuk s são como se segue:

$$\begin{aligned} f(0,0,0) &= 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(0,0,0) &= 0 \Leftrightarrow 0 = 0 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(0,0,1) &= f(0,0,1) - f(0,0,0) \Leftrightarrow 0 = 0 - 0 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(0,1,0) &= f(0,1,0) - f(0,0,0) \Leftrightarrow 0 = 0 - 0 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(0,1,1) &= f(0,1,1) - f(0,0,0) \Leftrightarrow 1 = 1 - 0 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(1,0,0) &= 1 + 2f(0,0,0) - f(0,0,1) - f(0,1,0) \Leftrightarrow 1 = 1 + 2 \cdot 0 - 0 - 0 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(1,0,1) &= 1 + f(0,0,0) - f(0,1,0) \Leftrightarrow 1 = 1 + 0 - 0 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(1,1,0) &= 1 + f(0,1,0) - f(0,1,1) \Leftrightarrow 0 = 1 + 0 - 1 \rightarrow \text{Verdade} \\ f(1,1,1) &= 1 \Leftrightarrow 1 = 1 \rightarrow \text{Verdade} \end{aligned} \quad (6)$$

O diagrama espaço-temporal da regra 184 pode ser observado na Figura 4.

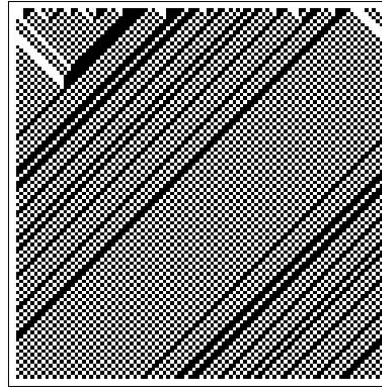


Figura 4. Diagrama espaço-temporal da regra 184 do espaço elementar para uma condição inicial aleatória de comprimento 100 e 100 iterações.

Na Figura 4, observa-se a evolução espaço-temporal de uma configuração inicial aleatória de comprimento 100. Nota-se que, a partir de um certo instante  $t$ , a regra 184 emula a regra 170, que também é conservativa, pois é equivalente à aplicação do operador de deslocamento para a esquerda (*shift-left*). Isto é, a partir de um certo instante  $t$  e dada uma certa configuração inicial, as dinâmicas espaço-temporais de ambas as regras 170 e 184 são equivalentes [Moreira, 2003].

Do ponto de vista aplicado, ACCs podem ser utilizados para modelagem de sistemas físicos isolados [Boccaro e Fuk s, 2002]. Por exemplo, no trabalho pioneiro de Nagel e Schreckenberg [1992] introduziu-se um modelo para simula o do fluxo de veículos, onde a quantidade total de elementos se mant m constante, ou seja, um sistema onde não ocorrem nem entradas ou saídas de novos veículos. Seu modelo   baseado na regra conservativa 184 apresentada anteriormente.

## 2.2 Autômatos Celulares e Reversibilidade

Reversibilidade implica em preserva o da informa o [Toffoli e Margolus, 1990]. Do ponto de vista da computa o não-convencional, um sistema físico, químico ou biológico que emulasse um AC computacionalmente universal, como por exemplo o AC 110 do espaço elementar [Wolfram, 2002], teria gasto energético minimizado se apresentasse também reversibilidade [Toffoli e Margolus, 1990]. Já do ponto de vista da computa o convencional, ACs reversíveis têm aplica es na modelagem de sistemas físicos termodinâmicos, tais como dinâmica de fluidos [Wolfram, 2002]. A Figura 5 mostra o diagrama espaço-temporal da regra 85 do espaço elementar, a qual apresenta reversibilidade.

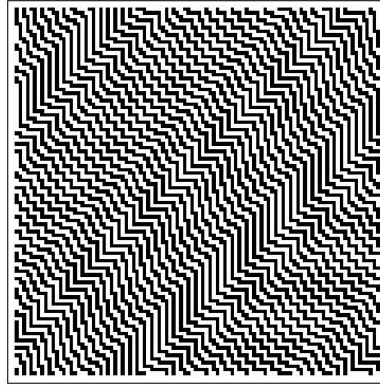


Figura 5. Diagrama espaço-temporal da regra 85 do espaço elementar, com configuração inicial de comprimento 100 e 100 iterações.

Considere um AC e seja  $G:\mathcal{C}\rightarrow\mathcal{C}$  sua função global de transição. Hedlund [1969] demonstrou em seu trabalho pioneiro sobre dinâmica simbólica que um AC  $G$  é reversível se, e somente se,  $G$  é uma função bijetora. Equivalentemente, um AC é reversível se, e somente se, dada qualquer configuração em seu espaço de estados, existe apenas uma pré-imagem relacionada a esta configuração, conforme apresenta-se, a título de exemplo, na Figura 6.

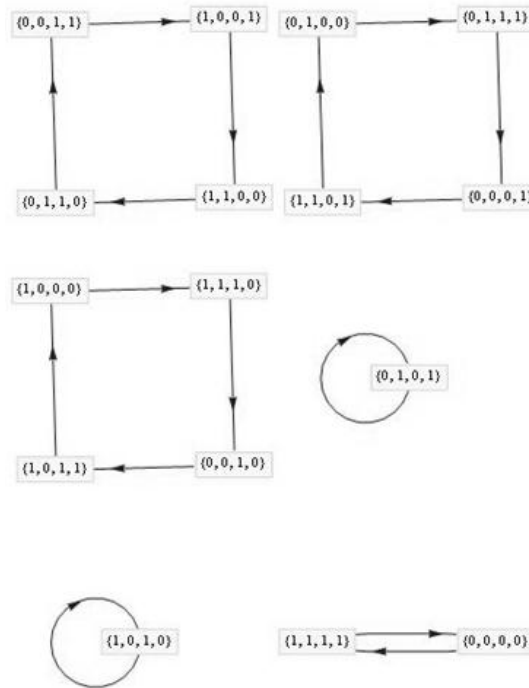


Figura 6. Campo de bacias de atração da regra 85 do espaço elementar, para configurações de comprimento 4.



Observa-se, na Figura 6, o campo de bacias de atração da regra 85 para as configurações de comprimento 4. Cada configuração  $C$ , representada por um vértice, é ligada a outra configuração  $C'$  de tal forma que  $C' = G(C)$ . Evidentemente, dada a reversibilidade da regra 85, não há configurações *Garden-of-Eden* (isto é, configurações que não apresentam predecessores). Portanto, qualquer campo de bacias de atração será constituído apenas por órbitas periódicas.

Toffoli [1977] demonstrou que, para qualquer AC  $d$ -dimensional, que define uma função global de transição  $G$ , existe um AC reversível no espaço de dimensão  $d+1$ , cuja função global associada  $G'$  emula  $G$ . Uma vez que a regra 110 do espaço elementar apresenta computabilidade universal, o teorema anterior implica na existência de um AC bidimensional reversível e também computacionalmente universal. Um AC unidimensional reversível e com computabilidade universal foi apresentado por Morita [2007]. [Amoroso e Patt, 1972] demonstraram que a decibilidade sobre a reversibilidade de um AC unidimensional pode ser efetivamente estabelecida e construíram um algoritmo aplicando seu resultado. Contudo, Kari [1994] demonstrou que não existem algoritmos capazes de determinar se um dado AC com dimensão maior ou igual a dois é ou não reversível e portanto, no caso geral, a reversibilidade de um dado AC é um problema indecidível. Por um longo período, questões relacionadas à reversibilidade de ACs foram consideradas em segundo plano [Toffoli e Margolus, 1990], principalmente devido à inexistência de uma ferramenta prática para sua criação. Mais tarde, Margolus [1984] introduziu uma técnica relativamente simples para construir um AC bidimensional reversível, denominada *vizinhança de Margolus*, que é uma ferramenta importante para a criação de ACs bidimensionais reversíveis que satisfazem certas propriedades pré-estabelecidas; além disso, sua técnica está relacionada tanto à Física quanto à Computação. Modelos sofisticados de ACs reversíveis vem sendo desenvolvidos e utilizados para a simulação de sistemas termodinâmicos, em especial os denominados *lattice-gas automata*, LGAs [Toffoli e Margolus, 1990], conforme apresenta a Figura 7. Pode-se também citar aplicações às arquiteturas computacionais não-convencionais, como por exemplo a computação baseada em colisões [Toffoli e Margolus, 1987].

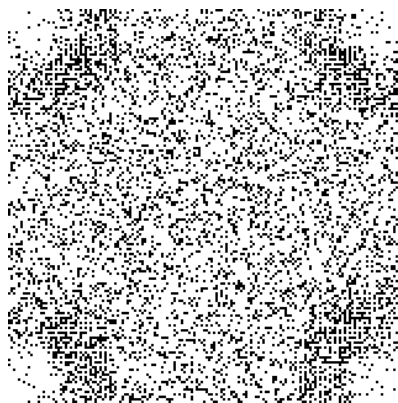


Figura 7. Lattice-gas automaton.

A Figura 7 apresenta uma configuração de um *lattice-gas automaton*. Tais modelos discretos, baseados em interações locais e de curto alcance, demonstram alta precisão na modelagem do comportamento de gases e fluidos. De fato, dada uma configuração inicial, sua evolução pode ser observada de forma exata [Toffoli e Margolus, 1990], sendo portanto superior às discretizações das equações diferenciais parciais de Navier-Stokes, as quais admitem sempre um erro maior que zero.

## Capítulo 3: Relações entre Autômatos Celulares Unidimensionais Reversíveis e as Pré-Imagens de seus Blocos Básicos

Seja  $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  a função global de transição de um AC reversível. Richardson [1972] demonstrou que, nessas circunstâncias, a inversa  $G^{-1}: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ , também é um AC reversível de tal forma que  $G^{-1} \circ G = G \circ G^{-1} = I_d$ , onde  $I_d$  é a função identidade global de transição no espaço correspondente. Tal resultado mostra que, considerando um mapeamento local que induz a um processo global reversível, existe um mapeamento local que induz ao processo global inverso. Assim, a conexão entre os mapeamentos locais diretos e inversos se dá de forma indireta. Um problema ainda não completamente solucionado diz respeito a tal conexão, isto é, sob quais condições é possível estabelecer uma conexão direta entre os mapeamentos locais direto e inverso? É esta questão que procura-se responder, pelo menos parcialmente, nas seções seguintes deste capítulo.

### 3.1 Definições

A seguir, apresentam-se algumas definições complementares ao Capítulo 1. Um bloco de comprimento  $L$  é um conjunto ordenado  $b_0 b_1 \dots b_{L-1}$  onde  $L \in \mathbb{Z}_+$  e  $b_i \in S$ , onde  $\mathbb{Z}_+$  é o conjunto dos números inteiros não negativos. Seja  $\mathcal{B}_L$  o conjunto de todos os blocos de comprimento  $L$  sobre  $S$ ; então, evidentemente,  $|\mathcal{B}_L| = |S|^L$ , onde, para qualquer conjunto enumerável  $\mathcal{E}$ , o operador  $|\mathcal{E}|$  equivale à cardinalidade de  $\mathcal{E}$ . Dessa forma, o operador de evolução de bloco associado à função local de transição de estados  $f: S^n \rightarrow S$  é dado por  $\mathbf{f}: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_1 : \mathbf{f}(b_0 b_1 \dots b_{n-1}) = b_i, b_i \in S$  onde  $\mathcal{B}_n$  é denominado conjunto dos blocos básicos de comprimento  $n$ . Como exemplo, seja  $S = \{0, 1\}$ , então  $\mathcal{B}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$  e  $|\mathcal{B}_2| = 4$ . Considerando  $N = (0, 1, \dots, n-1)$ , o operador global de transição de bloco pode ser definido como  $\mathbf{G}: \mathcal{B}_L \rightarrow \mathcal{B}_L$ , aplicando-se  $\mathbf{f}$  às todas as vizinhanças da configuração considerada. Por exemplo, considerando  $n=3$ , tem-se que  $\mathbf{G}(10101) = \mathbf{f}(101)\mathbf{f}(010)\mathbf{f}(101)\mathbf{f}(011)\mathbf{f}(110)$ . Finalmente, dado um bloco  $b \in \mathcal{B}_n$ , o conjunto das pré-imagens de  $b$  é dado por  $\mathbf{f}^{-1}(b)$  e, conseqüentemente, a cardinalidade do conjunto das pré-imagens de  $b$  é dado por  $|\mathbf{f}^{-1}(b)|$ .

### 3.2 O Parâmetro $\alpha$ de Caracterização Dinâmica

A previsão do comportamento dinâmico global de um AC a partir unicamente de sua função local de transição de estados é um problema indecidível [Culik II *et al*, 1990]. Contudo, tal abordagem se mostra útil quando o que se pretende é uma análise qualitativa da dinâmica de um dado AC, sem necessariamente a análise de diagramas espaço-temporais ou mesmo bacias de atração. Diversos parâmetros têm sido propostos para tanto [Binder, 1993; Langton, 1990; Li, 1991; Oliveira *et al*, 2001;

Voorhees, 1995; Wuensche, 1999; Zwick e Shu, 1995]. Todavia, independentemente de qual característica dinâmica o parâmetro se propõe a medir, espera-se que tal medida seja equivalente (numericamente igual) entre regras de uma mesma classe de equivalência dinâmica.

Considere-se a tripla  $(S, N, f)$ , onde  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$  e  $N = (0, 1, \dots, n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . O conjunto de pré-imagens de  $b \in \mathcal{B}_n$  é dado por  $\mathbf{f}^{-1}: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{2n-1}$  pois, qualquer que seja  $b \in \mathcal{B}_n$  :  $\mathbf{f}^{-1}(b) = \mathbf{f}^{-1}(b_0 b_1 \dots b_{n-1}) \neq \{ \}$ ,  $\exists b' \in \mathcal{B}_{2n-1} : \mathbf{f}(b') = \mathbf{f}(b'_0 b'_1 \dots b'_{n-1}) \mathbf{f}(b'_1 b'_2 \dots b'_n) \dots \mathbf{f}(b'_{n-1} b'_{10} \dots b'_{2n-2}) = b$ , e, dessa forma, o número máximo de pré-imagens de  $\mathcal{B}_n$  é dado por  $|\mathcal{B}_{2n-1}| = q^{2n-1}$ . No caso em que  $b \in \mathcal{B}_n : |\mathbf{f}^{-1}(b)| = \{ \}$ , isso implica que tal bloco básico não possui qualquer pré-imagem. Na Figura 8, observam-se algumas árvores de pré-imagens dos blocos básicos para regras binárias, com dois vizinhos, isto é,  $n=2$ .

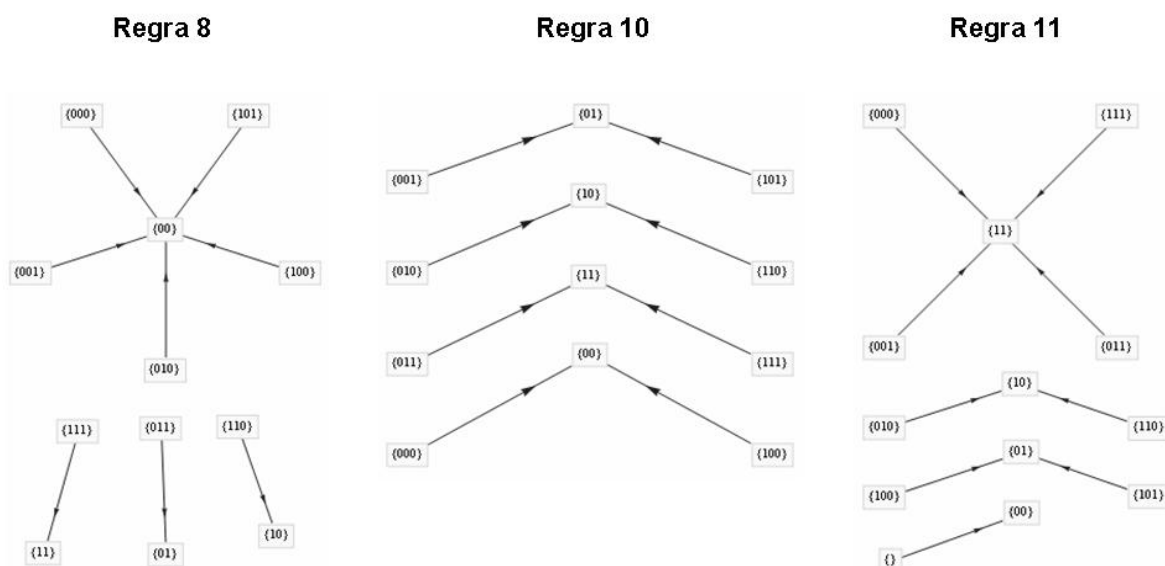


Figura 8. Campos de bacias de atração das pré-imagens dos blocos fundamentais.

Na Figura 8, apresentam-se três campos de bacias de atração das pré-imagens dos blocos básicos para as regras 8, 10 e 11, respectivamente, considerando-se  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ . Para a regra 8, o bloco básico 00 tem 5 pré-imagens, enquanto os demais obedecem a uma relação “um para um”. Para a regra 10, o número de pré-imagens está igualmente distribuído entre os blocos básicos. Finalmente, para a regra 11, nota-se que o bloco básico 00 não apresenta qualquer pré-imagem.

No atual contexto, uma pergunta natural que surge após observação da Figura 8 é: existiria alguma relação entre as pré-imagens dos blocos básicos e reversibilidade de ACs unidimensionais? No intuito de contribuir para solucionar esta questão, define-se o parâmetro  $\alpha$  de caracterização dinâmica como se segue:

$$\alpha = \frac{1}{|\mathcal{B}_{2n-1}|} \sum \bigcup_{b \in \mathcal{B}_n} \{|\mathbf{f}^{-1}(b)|\} \quad (7)$$

A título de exemplo, considere a regra 11, onde  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ . Assim, como  $n=2$ ,  $\mathcal{B}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$  e  $|\mathcal{B}_{2*2-1}| = |\mathcal{B}_3| = 2^3 = 8$ . Aplicando-se  $\mathbf{f}^1$  a cada bloco básico  $b \in \mathcal{B}_2$  obtém-se:  $\{|\mathbf{f}^1(00)|\} = \{0\}$ ,  $\{|\mathbf{f}^1(01)|\} = \{2\}$ ,  $\{|\mathbf{f}^1(10)|\} = \{2\}$  e  $\{|\mathbf{f}^1(11)|\} = \{4\}$ , conforme pode-se observar na Figura 8. Assim, dado que a união de cada  $\{|\mathbf{f}^1(b)|\}$  para todo  $b \in \mathcal{B}_2$  resulta na eliminação de um dos valores 2, a soma dos valores restantes resulta em  $\Sigma\{0, 2, 4\} = 6$  e, conseqüentemente,  $\alpha = 6/8 = 0.75$ .

De fato, há uma relação entre  $\alpha$ , a distribuição das pré-imagens dos blocos básicos, e reversibilidade, de tal forma que, se um dado AC é reversível, então o número de pré-imagens para cada bloco básico está igualmente distribuído e, conseqüentemente,  $\alpha$  assume valor mínimo. Dessa forma, estabelecem-se os seguintes teoremas:

**Lema 1.** Fixado  $k \in \mathbb{Q}^+$ , onde  $\mathbb{Q}^+$  é o conjunto dos números racionais não-negativos, seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_i \in \mathbb{Q}^+$  de tal forma que  $\sum A = a_1 + \dots + a_n = k$ . Então  $\sum A$  é mínima se, e somente se, qualquer que seja  $a_i \in A$ ,  $a_i = \frac{k}{n} = \frac{\sum A}{n}$ .

**Demonstração.** Fixado  $k \in \mathbb{Q}^+$ , seja  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ ,  $a_i \in \mathbb{Q}^+$ , de tal forma que  $\sum A = a_1 + \dots + a_n = k$ .

Se  $\sum A$  é mínima, então cada  $a_i \in A$  assume valor mínimo  $a_{min}$ , de tal maneira que  $n \cdot a_{min} = k \Rightarrow$

$$a_{min} = \frac{k}{n} = \frac{\sum A}{n}. \text{ Analogamente, se } a_1 = a_2 = \dots = a_n = a \Rightarrow n \cdot a = k \Rightarrow a = \frac{k}{n} = \frac{\sum A}{n} = a_{min} \Rightarrow \sum A \text{ é}$$

mínima. Q.E.D.

**Teorema 1.** Seja a tripla  $(S, N, f)$ , onde  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$  e  $N = (0, 1, \dots, n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Considere  $\alpha$  como definido em (7),  $\mathcal{B}_n$  como o conjunto dos blocos básicos de comprimento  $n$ , e  $\mathbf{f}^1: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{2n-1}$  a função que produz as pré-imagens dos blocos básicos de comprimento  $n$ . Então  $\alpha$  é mínimo e igual a  $q^{-n}$  se, e somente se, o número de pré-imagens está igualmente distribuído entre os blocos básicos.

**Demonstração.** Por hipótese, considere-se  $\alpha$  mínimo, fixados  $n$  e  $q$ . Assim,  $\alpha$  torna-se dependente apenas de  $\sum \bigcup_{b \in \mathcal{B}_n} \{|\mathbf{f}^{-1}(b)|\}$ , que, pela hipótese, assume valor mínimo. Pelo Lema 1, tem-se que

$$\text{qualquer que seja } b \in \mathcal{B}_n, |\mathbf{f}^{-1}(b)| \text{ assume um mesmo valor. Assim } \alpha = \frac{|\mathcal{B}_{2n-1}|}{|\mathcal{B}_n| |\mathcal{B}_{2n-1}|} = q^{-n}.$$

Analogamente, fixados  $n$  e  $q$ , considere-se por hipótese que, para qualquer  $b \in \mathcal{B}_n$ ,  $|\mathbf{f}^{-1}(b)|$  assume um mesmo valor; conseqüentemente, pelo Lema 1, segue que  $\sum \bigcup_{b \in \mathcal{B}_n} \{|\mathbf{f}^{-1}(b)|\}$  é mínima e, portanto,  $\alpha$  é mínimo. Q.E.D.

**Teorema 2.** Seja a tripla  $(S, N, f)$ , onde  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$  e  $N = (0, 1, \dots, n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  e  $\mathbf{G}: \mathcal{B}_L \rightarrow \mathcal{B}_L$ ,  $L \in \mathbb{Z}_+$ , o operador global de evolução de bloco, com condição de contorno periódica. Considere  $\alpha$  como definido em (7),  $\mathcal{B}_n$  como o conjunto dos blocos básicos de comprimento  $n$ , e  $\mathbf{f}^1: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{2n-1}$  a função que produz as pré-imagens dos blocos básicos de comprimento  $n$ . Se  $\mathbf{G}$  é reversível, então o número de pré-imagens está igualmente distribuído entre os blocos básicos.

**Demonstração.** Considere, por absurdo, que o número de pré-imagens não está igualmente distribuído entre os blocos básicos. Assim,  $\exists b, d \in \mathcal{B}_n : |\mathbf{f}^{-1}(b)| - |\mathbf{f}^{-1}(d)| \geq 1$ . Considere, sem perda de generalidade,

$|\mathbf{f}^{-1}(b)| - |\mathbf{f}^{-1}(d)| = 1$ . Assim,  $|\mathbf{f}^{-1}(b)| = \frac{|\mathcal{B}_{2n-1}|}{|\mathcal{B}_n|} + 1 = q^{n-1} + 1$ . Dessa forma, seja  $c' \in \mathcal{B}_{2n-1}$  a pré-imagem

adicional, então  $\mathbf{f}(c'_0 \ c'_1 \ \dots \ c'_{n-1})\mathbf{f}(c'_1 \ c'_2 \ \dots \ c'_n)\dots\mathbf{f}(c'_{n-1} \ c'_n \ \dots \ c'_{2n-2}) = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$  e, dessa forma,  $\mathbf{G}(c') = b_0 b_1 \dots b_{n-1} \mathbf{f}(c'_n \ c'_{n+1} \ \dots \ c'_0)\mathbf{f}(c'_{n+1} \ c'_{n+2} \ \dots \ c'_1)\dots\mathbf{f}(c'_{2n-2} \ c'_0 \ \dots \ c'_{n-2})$ . Assim,  $\mathbf{G}(c')$  pode assumir  $q^{n-1}$  blocos distintos, coincidentes até a  $(n-1)$ -ésima posição a qualquer outro bloco  $c \in \mathcal{B}_{2n-1} : \mathbf{f}(c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{n-1})\mathbf{f}(c_1 \ c_2 \ \dots \ c_n) \dots \mathbf{f}(c_{n-1} \ c_n \ \dots \ c_{2n-2}) = b_0 b_1 \dots b_{n-1}$ . Uma vez dada a reversibilidade de  $\mathbf{G}$ , cada um dos  $q^{n-1}$  blocos distintos está associado a exatamente uma das pré-imagens e, portanto, a pré-imagem adicional é igual a uma das  $q^{n-1}$  pré-imagens previamente consideradas, o que é uma contradição! Logo, se  $\mathbf{G}$  é reversível, então o número de pré-imagens está igualmente distribuído entre os blocos básicos. Q.E.D.

**Corolário.** Fixados  $n$  e  $q$ , se  $\mathbf{G}$  é reversível, então, pelos Teoremas 1 e 2,  $\alpha$  é mínimo.

Observe-se que, contrariamente ao que se poderia pensar em princípio, o fato de  $\mathbf{G}$  ser reversível (e, portanto, bijetora), não implica que cada bloco teria apenas uma pré-imagem. Afinal, para  $q^n$  blocos básicos, existem  $q^{2n-1}$  pré-imagens destes no total, conforme a definição de  $\mathbf{f}^1$ . A questão é que  $\alpha$  não se relaciona diretamente com as pré-imagens das configurações globais, mas sim com as pré-imagens dos blocos básicos. O Teorema 2 mostra que, se  $\mathbf{G}$  é reversível, isso implica numa certa distribuição dos blocos básicos, isto é, cada bloco básico tem o mesmo número de pré-imagens. Em outras palavras, a dinâmica global reversível implica numa certa dinâmica local (não

necessariamente reversível) onde as pré-imagens dos blocos básicos estão igualmente distribuídas entre os mesmos, qualquer que seja o AC unidimensional reversível considerado.

Assim como acontece com outros parâmetros de caracterização dinâmica (conforme mencionado no início desta seção), o teorema a seguir prova que o valor do parâmetro  $\alpha$  é invariante em uma mesma classe de equivalência dinâmica.

**Teorema 3.** Seja a tripla  $(S, N, f)$ , onde  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$  e  $N = (0, 1, \dots, n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$ . Considere-se  $\alpha$  como definido em (3),  $\mathcal{B}_n$  como o conjunto dos blocos básicos de comprimento  $n$ , e  $\mathbf{f}^1: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_{2n-1}$  a função que produz as pré-imagens dos blocos básicos de comprimento  $n$ . Então,  $\alpha$  assume um mesmo valor entre regras de uma mesma classe de equivalência dinâmica.

**Demonstração.** Sejam  $C$  e  $R$  os operadores de Conjugação e Reflexão dados por (4). Então,  $\alpha = \alpha_R \Leftrightarrow$

$$\sum_{b \in \mathcal{B}_n} \{|\mathbf{f}^{-1}(b)|\} = \sum_{b' \in \mathcal{B}_n} \{|\mathbf{f}^{-1}(b')|\} \Leftrightarrow \exists b, b' \in \mathcal{B}_n : b = b_0 b_1 \dots b_{n-1} \Rightarrow b' = b_{n-1} b_{n-2} \dots b_0. \text{ Assim,}$$

definidos  $f: S^n \rightarrow S$  e o operador de evolução de bloco correspondente  $\mathbf{f}: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_1$ , é claro que

$$|\mathbf{f}^1(b)| = |\mathbf{Rf}^1(b')|, \text{ o que mantém } \alpha. \text{ Analogamente, } \alpha = \alpha_C \Leftrightarrow \sum_{b \in \mathcal{B}_n} \{|\mathbf{f}^{-1}(b)|\} = \sum_{b' \in \mathcal{B}_n} \{|\mathbf{f}^{-1}(b')|\} \Leftrightarrow$$

$\exists b, b' \in \mathcal{B}_n : b = b_0 b_1 \dots b_{n-1} \Rightarrow b' = (q-1-b_{n-1})(q-1-b_{n-2}) \dots (q-1-b_0)$ , onde  $(.)$  é o operador de concatenação

de bloco (não confundir com produto). Logo  $|\mathbf{f}^1(b)| = |\mathbf{Cf}^1(b')|$  e assim, preserva-se  $\alpha$ . Aplicando-se os

mesmos argumentos anteriores, demonstra-se que  $\alpha$  se mantém também para a composição  $CR$ .

Q.E.D.

A Figura 9 apresenta os valores de  $\alpha$  para as 88 classes de equivalência no espaço elementar, isto é  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (-1, 0, 1)$ . Nota-se que  $\alpha$  assume valor mínimo ( $\alpha=0,125$ ) para 12 regras, cujos números são: 15, 30, 45, 51, 60, 90, 105, 106, 150, 154, 170 e 204. De fato, as regras 15, 51, 170 e 204 são reversíveis e, portanto, necessariamente, apresentam  $\alpha$  mínimo. Entretanto, regras não-reversíveis que apresentam distribuição das pré-imagens dos blocos básicos equivalente à de regras reversíveis, também apresentam  $\alpha$  mínimo. Ou seja,  $\alpha$  mínimo é uma condição necessária à reversibilidade, porém não suficiente. Surge naturalmente a seguinte questão (em aberto): é possível decidir sobre a reversibilidade de um AC unidimensional considerando-se apenas análises relativas às pré-imagens de seus blocos básicos? E, em caso afirmativo, quais são as condições necessárias e suficientes nesse contexto? Conforme já mencionado, de forma geral trata-se de um problema indecidível para ACs de duas ou mais dimensões [Kari, 1996]. Observa-se também que  $\alpha$  assume valor máximo ( $\alpha=1,0$ ) somente para a regra 0 (ou para sua equivalente dinâmica, a regra 255). Isso ocorre devido ao fato de o

bloco básico 000 (ou 111 para a regra 255) apresentar todas as pré-imagens, acarretando que todos os outros blocos básicos deixam de possuir qualquer pré-imagem.

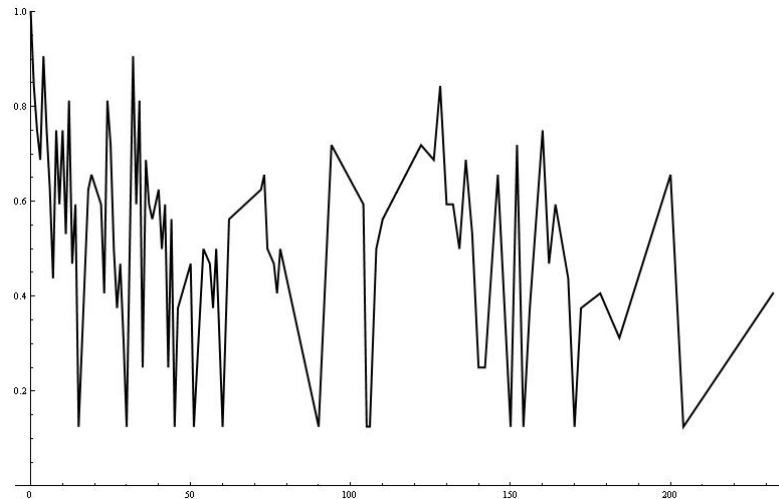


Figura 9. Valores de  $\alpha$  em função das classes de equivalência dinâmica do espaço elementar de regras.

A Figura 10 ilustra a distribuição do parâmetro  $\alpha$  para  $S = \{0, 1\}$ ,  $N = (-2, -1, 0, 1, 2)$ , isto é, regras unidimensionais com  $q=2$  e  $n=5$ .

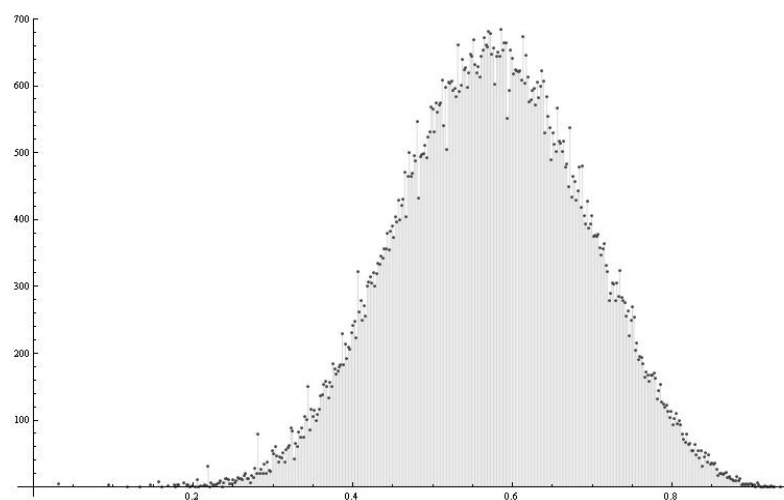


Figura 10. Distribuição de  $\alpha$  para  $q=2$  e  $n=5$  e amostragem de 100.000 regras distintas.



Na Figura 10, a distribuição de  $\alpha$  é obtida para uma amostragem de 100.000 regras distintas do espaço onde  $q=2$  e  $n=5$ , o que lembra uma distribuição normal. A título de comparação, a Figura 11 mostra a distribuição dos parâmetros  $Z$  [Wuensche e Lesser, 1992],  $\lambda$  [Langton, 1990], Sensitividade e Domínio da vizinhança [Oliveira *et al*, 2001], nas mesmas condições da Figura 10. Nota-se claramente a maior quantidade de valores que o parâmetro  $\alpha$  pode assumir, apesar de não se compreender bem ainda as implicações de tal característica.

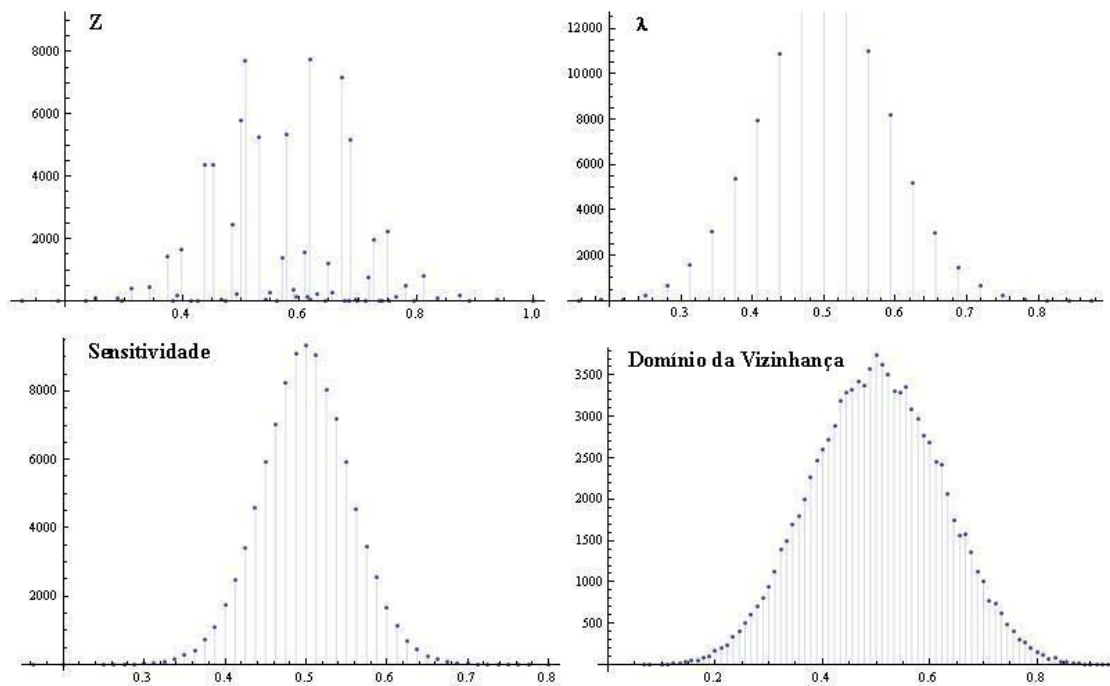


Figura 11. Distribuição dos parâmetros  $Z$ ,  $\lambda$ , Sensitividade e Domínio da Vizinhança para  $q=2$ ,  $n=5$  e amostragem de 100.000 regras distintas.

Dentre as aplicações do parâmetro  $\alpha$ , além é claro de condição necessária à reversibilidade de ACs unidimensionais, conjectura-se, com base em experimentos numéricos, sua aplicação como medida de grau de reversibilidade. Contudo, mais estudos fazem-se necessários para uma melhor compreensão e interpretação, tanto das propriedades do parâmetro  $\alpha$  quanto de suas aplicações.

## Capítulo 4: Autômatos Celulares Conservativos e Reversíveis

Este capítulo investiga propriedades dos ACs unidimensionais conservativos e reversíveis (ACCRs). Deste ponto em diante, considera-se apenas a classe dos ACCRs unidimensionais, a menos quando explicitamente especificado.

ACs unidimensionais conservativos e reversíveis são aqueles que satisfazem tanto as condições (3) de Boccara-Fukús [2002] quanto as condições de Hedlund [1969], isto é, a função global de transição do AC deve ser conservativa e bijetora. Casos triviais de ACCRs podem ser construídos considerando-se as funções locais de transição de estados como funções deslocamento (*shift*) e identidade, pois, no primeiro caso, ocorrem apenas deslocamentos à esquerda ou à direita nas configurações e, no segundo caso, ocorre a replicação da configuração.

Dessa forma, considere-se a tripla  $(S, N, f)$ , onde  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ , isto é, o espaço de regras de dois estados e vizinhança de comprimento 2. Uma busca exaustiva neste espaço enumera rapidamente os ACCRs, os quais apresentam os seguintes números de regras: 10 (identidade) e 12 (*shift*); para espaços de maior cardinalidade, a enumeração dos ACs unidimensionais reversíveis pode ser estabelecida através de técnicas algébricas [Boykett, 2004]. Considerem-se ainda os operadores de evolução de bloco  $\mathbf{f}: \mathcal{B}_n \rightarrow \mathcal{B}_1$  e  $\mathbf{g}: \mathcal{B}_m \rightarrow \mathcal{B}_1$  relacionados, respectivamente, às funções locais de transição  $f: S^n \rightarrow S$  com  $N = (0, 1, \dots, n-1)$ ,  $n \in \mathbb{Z}_+$  e  $g: S^m \rightarrow S$  com  $N = (0, 1, \dots, m-1)$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ . A composição  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  pode ser obtida a partir de  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$ , a qual se define como segue:

$$\mathbf{f} \circ \mathbf{g}: \mathcal{B}_{m+n-1} \rightarrow \mathcal{B}_1 : \mathbf{f} \circ \mathbf{g}(b_0 b_1 \dots b_{m+n-2}) = \mathbf{f}(\mathbf{g}(b_0 b_1 \dots b_{m-1}) \mathbf{g}(b_1 b_2 \dots b_m) \dots \mathbf{g}(b_{n-1} b_n \dots b_{m+n-2})) \quad (8)$$

Note-se que deve-se aplicar  $\mathbf{g}$  a todas as vizinhanças de comprimento  $m$  dos blocos de comprimento  $n$ . Dessa forma, ao aplicar  $\mathbf{g}$  ao  $(n-1)$ -ésimo elemento do bloco, são necessários ainda  $m-1$  elementos para completar a vizinhança de  $m$  elementos sobre a qual  $\mathbf{g}$  é definida. Assim, os blocos considerados para a composição  $\mathbf{f} \circ \mathbf{g}$  devem ter comprimento  $m+n-1$ , isto é, pertencem a  $\mathcal{B}_{m+n-1}$ .

Sejam os ACCRs acima mencionados, cujos números são  $W(f)=10$  e  $W(g)=12$ . Dessa forma, os operadores de evolução de bloco  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$ , associados respectivamente às funções locais de transição  $f$  e  $g$ , podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(00) &= 0, \mathbf{f}(01) = 1, \mathbf{f}(10) = 0, \mathbf{f}(11) = 1 \\ \mathbf{g}(00) &= 0, \mathbf{g}(01) = 0, \mathbf{g}(10) = 1, \mathbf{g}(11) = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Assim, a composição  $f \circ g$  é dada por:

$$\begin{aligned}
f \circ g(000) &= f(g(00)g(00)) = f(00) = 0 \\
f \circ g(001) &= f(g(00)g(01)) = f(00) = 0 \\
f \circ g(010) &= f(g(01)g(10)) = f(01) = 1 \\
f \circ g(011) &= f(g(01)g(11)) = f(01) = 1 \\
f \circ g(100) &= f(g(10)g(00)) = f(10) = 0 \\
f \circ g(101) &= f(g(10)g(01)) = f(10) = 0 \\
f \circ g(110) &= f(g(11)g(10)) = f(11) = 1 \\
f \circ g(111) &= f(g(11)g(01)) = f(11) = 1
\end{aligned} \tag{10}$$

Logo,  $W(f \circ g) = 11001100_2 = 204$ , que, conforme visto anteriormente, trata-se de um ACCR do espaço elementar. De fato, uma vez que  $f: S^n \rightarrow S$  e  $g: S^m \rightarrow S$  definem os ACs  $F$  e  $G$  conservativos e reversíveis, isso implica que suas funções globais de transição são conservativas e bijetoras. Dado que a composição de funções bijetoras é uma função bijetora, e que a conservabilidade também se preserva entre composições [Boccaro e Fukš, 2002], a composição  $f \circ g: S^{m+n-1} \rightarrow S$  é, portanto, conservativa e bijetora, induzindo assim à função global de transição (conservativa e reversível)  $F \circ G$ .

Considerando-se ainda  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ , podem-se definir as seguintes composições:  $f \circ f = f^2$ ,  $g \circ g = g^2$ , e, finalmente,  $f \circ g = g \circ f$  (esta última igualdade demonstrada no Teorema 4 a seguir), tais que  $W(f \circ f) = 10101010_2 = 170$ ,  $W(g \circ g) = 1111000_2 = 240$  e  $W(f \circ g) = W(g \circ f) = 11001100_2 = 204$ .

**Lema 2.** Sejam  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ , então  $f \circ g = g \circ f$ .

**Demonstração.** Sejam  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ . Basta aplicar a definição (8) para  $f \circ g$  e  $g \circ f$  e notar que  $W(f \circ g) = W(g \circ f)$ , o que resulta  $f \circ g = g \circ f$ .

**Teorema 4.** Sejam as triplas  $(S, N, f)$  e  $(S, N, g)$ , onde  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ . Então  $f^n \circ g^m = g^m \circ f^n$  quaisquer que sejam  $m, n \in \mathbb{Z}_+$ .

**Demonstração.** Pelo Lema 2, segue que:  $f \circ g = g \circ f \Rightarrow f^n \circ g^m = f^{n-1} \circ f \circ g \circ g^{m-1} = f^{n-1} \circ g \circ f \circ g^{m-1} = f^{n-2} \circ f \circ g \circ f \circ g \circ g^{m-2} = f^{n-2} \circ g \circ g \circ f \circ f \circ g \circ g^{m-2} = \dots = g^m \circ f^n$ . Q.E.D.

Nota-se que as composições anteriormente apresentadas definem todos os ACCRs do espaço elementar de regras. De fato, buscas exaustivas considerando-se  $n \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$  e  $q=2$ ;  $n \in \{2, 3, 4\}$  e  $q=3$ ; e  $n \in \{2, 3\}$  e  $q=4$  indicam que todo ACCR é uma composição dos ACCRs para  $n=2$  e um dado  $q$ . Conjectura-se pois que:

**Conjectura 1.** Sejam  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$  e  $N \in \mathbb{Z}^n$ . A tripla  $(S, N, \zeta)$  define um ACCR se, e somente se,  $\zeta = f_1^{y_1} \circ f_2^{y_2} \circ \dots \circ f_k^{y_n}$  onde  $k \in \mathbb{Z}_+$ ,  $y_i \in \mathbb{Z}_+$ ,  $f_i$  é uma função local de transição  $f: S^2 \rightarrow S$  que define um ACCR nesse espaço e  $\sum_{i=1}^n y_i = n - 1$ .

Em outras palavras, a Conjectura 1 afirma que dado um ACCR, pode-se sempre defini-lo como uma composição dos ACCRs do espaço onde a vizinhança tem comprimento  $n=2$ , para um dado  $q$ , os quais podem ser encontrados através de uma busca exaustiva [Boykett, 2004]. Uma das implicações da Conjectura 1 é obviamente verdadeira, isto é, que qualquer composição de ACCRs sempre é um ACCR. Contudo, existe algum ACCR que não seja composição dos ACCRs com  $n=2$  para um dado  $q$ ? Experimentos numéricos (citados anteriormente) sugerem que a resposta é negativa, contudo, uma demonstração ou contra-exemplo ainda se faz necessário. De fato, uma demonstração para tal conjectura permitiria estabelecer uma enumeração entre os comprimentos das vizinhanças e a quantidade de ACCRs no espaço correspondente, os quais podem ser facilmente identificados através do cálculo das composições das funções de transição de estados com  $n=2$ .

A Tabela 1 apresenta todos os ACCRs obtidos de forma analítica (através do cálculo das composições) e experimentalmente (através de buscas exaustivas em todos os espaços correspondentes). Ambas as abordagens resultaram no mesmo conjunto de regras. A Conjectura 1 baseia-se fortemente nesse resultado.

$N$	$q$	Composições	Qtd.	$W(.)$
2	2	$f, g$	2	10, 12
3	2	$f^2, f \circ g, g^2$ Onde $f \circ g = g \circ f$	3	170, 204, 240
4	2	$f^3, f^2 \circ g, f \circ g^2, f^3$	4	43690, 52428, 61680, 65280
5	2	$f^4, f^3 \circ g, f^2 \circ g^2, f \circ g^3, g^4$	5	2863311530, 3435973836, 4042322160, 4278255360, 4294901760
6	2	$f^5, f^4 \circ g, f^3 \circ g^2, f^2 \circ g^3, f \circ g^4, g^5$	6	14756797279864794316, 14757395258967641292, 17361641481138401520, 18374966859414961920, 18446462603027742720, 18446744069414584320
2	3	$f, g$	2	15897, 19305
3	3	$f^2, f \circ g, g^2$	3	6159136430181, 7479532539765, 7625403764901

		Onde $f \circ g = g \circ f$		
2	4	$f, g, h, i$	4	3840206052, 4120966560, 4008592452, 4289352960
3	4	$f^2, f \circ g, g^2, f \circ h, g \circ h, h^2, f \circ i, g \circ i, h \circ i, i^2$ Onde, além da comutatividade, vale: $g \circ h = f \circ i$ (basta efetuar as composições conforme definidas em (5)).	9	304252469246956743802546707821345694948, 326496608407547273709880145194317313440, 326937960348609920534832483808753787040, 317593414314454845085324736983695508548, 339837553475045374992658174356667127040, 317596875792875899220185137553843962948, 339837553475045374992658174356667127040, 340278905416108021817610512971103600640, 339841014953466429127518574926815581440, 340282366894529075952470913541252055040

Tabela 1. ACCRs obtidos de forma analítica e experimental, onde  $n$  é o comprimento da vizinhança considerada (iniciando-se com  $n=2$ , onde as regras não são composições de nenhuma outra),  $q$  é a quantidade de estados,  $Qtd.$  é a quantidade de ACCRs no espaço considerado, e  $W(.)$  é referente ao número da regra, segundo a notação de Wolfram.

Adicionalmente, em particular, estabelece-se a enumeração dos ACCRs binários como a seguir:

**Conjectura 2.** Sendo  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ , a tripla  $(S, N, \zeta)$  define um ACCR se, e somente se,  $\zeta = f^x \circ g^y$  onde  $x, y \in \mathbb{Z}_+ : x+y = n-1$  e  $f: S^2 \rightarrow S, g: S^2 \rightarrow S$  funções locais de transição tais que  $W(f) = 10$  e  $W(g) = 12$ . Note-se a relação com o binômio de Newton, uma vez que  $f \circ g = g \circ f$ .

Finalmente, com base na representação  $q$ -ária dos ACCRs apresentados na Tabela 1, apresenta-se ainda a seguinte conjectura:

**Conjectura 3.** Sejam  $S = \{0, 1\}$  e  $N = (0, 1)$ . Então um AC é conservativo e reversível se, e somente se, a representação binária de seu número de regra é da forma  $[1^x 0^y]$ , onde  $x, y \in \mathbb{Z}_+ : xy = 2^{n-1}$ .

ACs reversíveis da forma  $[1^x 0^y]$  e  $[0^x 1^y]$ , onde  $x, y \in \mathbb{Z}_+ : xy = 2^{n-1}$  foram identificadas em [Kronemberger, 2008] como 'regras reversíveis primitivas'. Evidentemente, ACs da forma  $[0^x 1^y]$  não satisfazem as condições de Boccara-Fuks, pois  $f(0, \dots, 0) = 1$ , e conseqüentemente, não pertencem à classe dos ACCRs.

A título de exemplo, considere  $S = \{0, 1\}$ ,  $q=2$  e  $n=4 \Rightarrow [1]^x[0]^y : xy = 2^{4-1}$ . As soluções da equação são  $\{\{1, 8\}, \{2, 4\}, \{4, 2\}, \{8, 1\}\}$ , o que implica nas seguintes representações binárias:  $10101010101010_2$ ,  $1100110011001100_2$ ,  $1111000011110000_2$  e  $1111111100000000_2$ , que são, respectivamente, as regras de números 43690, 52428, 61680 e 65280, conforme encontram-se na Tabela 1. Uma demonstração para a Conjectura 3 permitiria estabelecer com segurança e eficiência um ACCR binário com qualquer comprimento de vizinhança. Por exemplo, um ACCR binário de vizinhança 9 tem seu número representado por:

1111111111111111111111111111110000000000000000000000000000000011111111111111111111  
 11111111111110001111111111111111111111110000  
 000000000000000000000000000000001111111111111111111111111110000000000000000000  
 000000000011111111111111111111111111111000000000000000000000000000001111111111  
 11111111111111111111110000000000000000000000000000111111111111111111111111111111111111111  
 111111000000000000000000000000000000111111111111111111111111111110000000000000  
 000000000000000000000000\_2

## Capítulo 5: Algumas Relações entre Autômatos Celulares Lineares e Autômatos Celulares Conservativos e Reversíveis

Um AC é linear se sua função local de transição de estados é uma função linear [Kari, 2005]. Tal propriedade facilita significativamente a análise rigorosa de ACs, em particular em provas que certos problemas indecidíveis para ACs em geral (tais como sobrejetividade e injetividade) não o são para ACs lineares (ACLs) [Kari, 2005].

Um ACL pode ser definido como se segue. Sendo  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $q \in \mathbb{Z}_+$  um conjunto finito de estados, e  $f: S^n \rightarrow S$  uma função linear, então  $\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in S^n$ , tem-se que

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \quad (11)$$

onde  $a_1, a_2, \dots, a_n \in S$ . Em particular pode-se considerar  $S = \mathbb{Z}_m$  onde  $\mathbb{Z}_m$  é o conjunto dos números inteiros módulo  $m$ ,  $m \in \mathbb{Z}_+$ . Por exemplo, as regras  $10 = 1010_2$  e  $12 = 1100_2$  com  $S = \{0, 1\}$  e  $n=2$  são lineares, pois vale:

$$\begin{aligned} f(0,0) &= 0 = 0.0 + 1.0; f(0,1) = 1 = 0.0 + 1.1 \\ f(1,0) &= 0 = 0.1 + 1.0; f(1,1) = 1 = 0.1 + 1.1 \\ f(0,0) &= 0 = 1.0 + 0.0; f(0,1) = 0 = 1.0 + 0.1 \\ f(1,0) &= 1 = 1.1 + 0.0; f(1,1) = 1 = 1.1 + 0.1 \end{aligned} \quad (12)$$

Portanto, para a regra 10,  $a_1=0$  e  $a_2=1$  e para a regra 12,  $a_1=1$  e  $a_2=0$ . Vale notar que uma propriedade dos ACLs que é particularmente útil no desenvolvimento deste trabalho é o fato de que a composição de regras lineares também é uma regra linear [Kari, 2005].

Dado o contexto do presente trabalho, surge naturalmente a seguinte questão: existiria alguma relação entre ACLs e ACCRs? Observe-se, por exemplo, que, para  $S = \{0, 1, 2, 3\}$  e  $n=2$ , existem quatro ACCRs, mas somente dois deles são também ACLs. De fato, as regras de número

$$\begin{aligned} 3840206052 &= 3210321032103210_4 \text{ (Identidade),} \\ 4289352960 &= 3333222211110000_4 \text{ (Deslocamento para a direita),} \\ 4120966560 &= 3311220033112200_4 \text{ e} \\ 4008592452 &= 3232323210101010_4 \end{aligned}$$

são ACCRs, mas somente a primeira e a segunda também são ACLs. Assim, aplicando (11) a estas, obtém-se  $a_1=0$ ,  $a_2=1$  e  $a_1=1$ ,  $a_2=1$  respectivamente; por outro lado, para as duas regras restantes, não há soluções que satisfazem (11) e, portanto, elas são não-lineares.

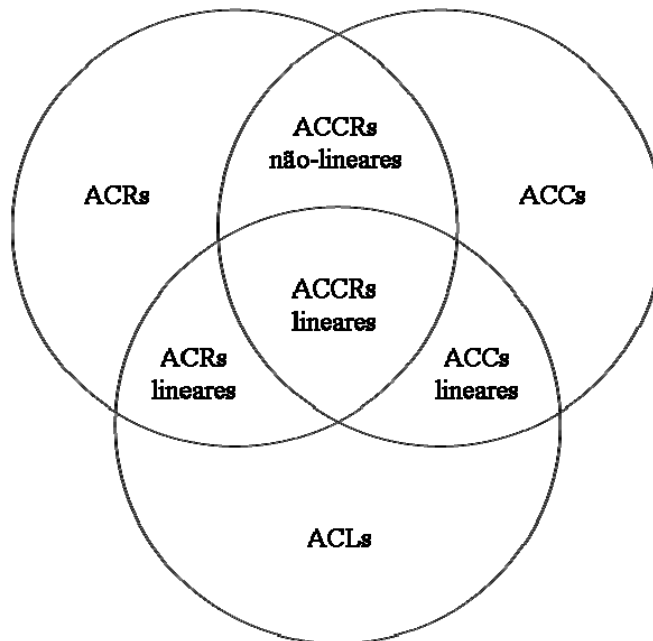


Figura 12. Interseção das classes dos ACCs, ACRs e ACLs.

Na Figura 12 observa-se que a classe dos ACCRs pode ser particionada em duas outras subclasses: ACCRs não-lineares e ACCRs lineares. A Tabela 2 apresenta as regras com número mínimo, para cada uma das classes de ACs da Figura 12.

Classe	Número da regra	$n$	$q$
ACR	3	2	2
ACC	184	3	2
ACL	0	2	2
ACR linear	43690	4	2
ACC linear	6924717700245	3	3
ACCR linear	10	2	2
ACCR não-linear	4008592452	2	4

Tabela 2. Regras de números mínimo de cada uma das classes de ACs apresentadas na Figura 12.



Experimentos numéricos sugerem que ACCRs lineares preservam a densidade de estados durante as iterações, isto é, a número de vezes que cada estado ocorre na configuração inicial. Consequentemente, a soma dos estados também preservada. Assim, considerando um ACCR linear e uma configuração inicial qualquer, após a  $k$ -ésima iteração, a configuração obtida será uma permutação da configuração inicial. Um exemplo desta propriedade pode ser observado a seguir, considerando o ACCR linear 3840206052, onde  $q=4$ ,  $N = (0, 1)$  e configuração inicial 303212103 (o símbolo  $\rightarrow$  indica a próxima iteração):

$$303212103 \rightarrow 032121033 \rightarrow 321210330 \rightarrow 212103303 \rightarrow 121033032 \quad (14)$$

Entretanto, ao se considerar ACCRs não-lineares, a densidade dos estados não é necessariamente preservada. Nesse sentido, observe, por exemplo, a evolução temporal do ACCR não-linear 326496608407547273709880145194317313440, para  $q=4$  e  $N = (0, 1, 2)$ , a partir da configuração inicial 303212103:

$$303212103 \rightarrow 230301231 \rightarrow 121032132 \rightarrow 012303303 \rightarrow 321231210 \quad (14)$$

Evidências computacionais sugerem uma dinâmica espaço-temporal distinta entre ACCRs lineares e não-lineares, conforme pode ser observado na Figura 13.

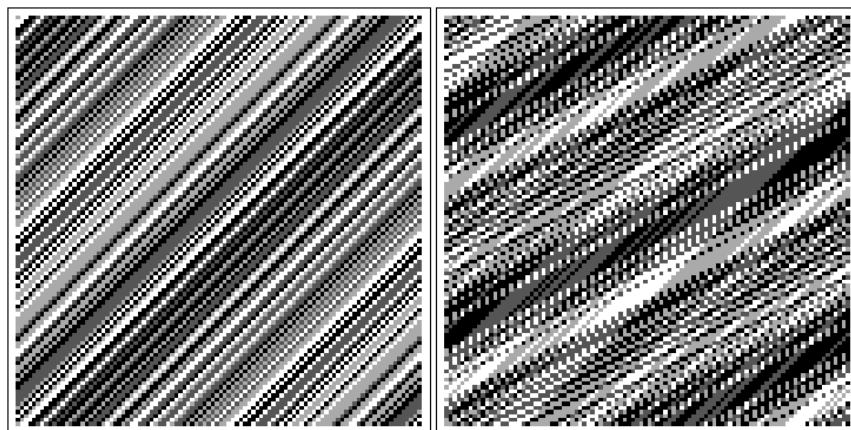


Figura 13. Diagramas espaço-temporais, por 100 iterações, respectivamente, para o ACCR linear 3840206052 ( $N=(0, 1)$  e  $q=4$ ) e para o ACCR não-linear 326496608407547273709880145194317313440 ( $N=(0, 1, 2)$  e  $q=4$ ), a partir de configuração inicial aleatória de comprimento 100.

ACCRs não-lineares apresentam fluxos que se interceptam, o que não ocorre para ACCRs lineares. De fato, experimentos numéricos sugerem que o número de fluxos que se interceptam é diretamente proporcional ao número de estados. Para ACCRs não-lineares, variando-se  $n$  e  $q$ , é possível observar diferentes composições de Identidades e Deslocamentos (esquerda e direita), com diferentes ângulos de interceptação, num mesmo diagrama espaço-temporal. Uma propriedade interessante observada na dinâmica local dos ACCRs não-lineares é o fato de que existem transições de estado que levam a um estado não presente na vizinhança considerada. Por exemplo, considerando-se as regras apresentadas na Figura 13, o ACCR não-linear apresenta a transição de estado  $f(3,2,1) = 0$ . Tal situação não foi observada para ACCRs lineares analisados e foi observada para todos os ACCRs não-lineares analisados e, de fato, é demonstrada no Teorema 5 que segue:

**Teorema 5.** Seja  $(S, N, f)$  um ACCR unidimensional, onde  $S = \{0, 1, \dots, q-1\}$ ,  $N \in \mathbb{Z}^n$ , e  $f: S^n \rightarrow S$ . Seja  $f(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_{n+1}$ , onde  $q_{n+1} \notin \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  e  $q_i \in S$ , uma transição local de estados. Então,  $(S, N, f)$  é um ACCR não-linear.

**Demonstração.** Assuma-se, por contradição, que  $(S, N, f)$  é um ACCR unidimensional linear. Então, por definição, as soluções para (4) são dadas por:  $\{(0, 0, \dots, 1), (0, 0, \dots, 1, 0), \dots, (1, 0, 0, \dots, 0)\}$ . Aplicando cada uma destas soluções à transição local  $f(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_{n+1}$ , resulta que:  $q_n = q_{n+1}$ ,  $q_{n-1} = q_{n+1}$ ,  $\dots$ ,  $q_1 = q_{n+1}$ . Contradição! Portanto,  $(S, N, f)$  é um ACCR unidimensional não-linear.

**Corolário.** Se  $(S, N, f)$  é um ACCR unidimensional linear, então, toda transição local de estados satisfaz:  $f(q_1, q_2, \dots, q_n) = q_{n+1}$ , onde  $q_{n+1} \in \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$  e  $q_i \in S$ .

Dessa forma, considerando-se qualquer ACCR unidimensional, basta verificar se suas transições locais satisfazem ou não o Teorema 5, o que torna possível classificar sua natureza como linear ou não-linear. Foi observado também que a representação  $q$ -ária das regras de ACCRs lineares pode ser escrita através da repetição de um único bloco, por exemplo, o ACCR linear de número 6159136430181, com  $q=3$  e  $n=3$ , pode ser escrito como  $21021021021021021021_3$ , ou seja,  $[210]^8$  (assumindo-se que o expoente indica o número de repetições do bloco). Entretanto, com relação a ACCRs não-lineares, são necessários pelo menos dois blocos distintos em sua representação  $q$ -ária. Por exemplo, a representação  $q$ -ária do ACCR não-linear de número 317596875792875899220185137553843962948, com  $q=3$  e  $n=3$ , é  $3232323232323232323232323232323210101010101010101010101010101010101010_4$ , ou, de forma reduzida:  $[32]^{16}[10]^{16}$ . De fato, a representação  $q$ -ária de ACCRs lineares pode ser generalizada facilmente; contudo, com relação a ACCRs não-lineares, a quantidade de blocos distintos a serem

considerados aumenta conforme o número de estados aumenta. Além disso, a posição dos blocos também se torna importante. Análises teóricas indicam que é possível associar o problema da representação  $q$ -ária dos ACCRs a um grupo algébrico de permutações, o que permitiria, além da obtenção de uma fórmula geral para a representação  $q$ -ária, uma análise de simetrias entre seus elementos. De qualquer forma, faz-se necessária uma formalização completa da dinâmica espaço-temporal de ACCRs lineares e não-lineares, incluindo propriedades tais como a preservação de densidade de estados para ACCRs lineares. Acredita-se, assim como no caso anterior, que a introdução de técnicas matemáticas mais gerais possam efetivamente solucionar tais questões.

## Capítulo 6: Dinâmica dos Autômatos Celulares Conservativos e Reversíveis

ACCRs são regidos por leis de conservação de quantidades e reversibilidade, o que implica em severas restrições na dinâmica de evolução espaço-temporal. De fato, qualquer que seja o ACCR, seu campo de bacias de atração conterá apenas órbitas periódicas impostas pela reversibilidade (i.e., bijeção da função global de transição) e, além disso, cada órbita periódica conterá apenas configurações que preservam a soma total de estados (i.e., definição de conservabilidade) ou que preservam também a densidade de estados (considerando-se ACCRs lineares). A Figura 14 ilustra um caso particular do espaço de estados de um ACCR linear.

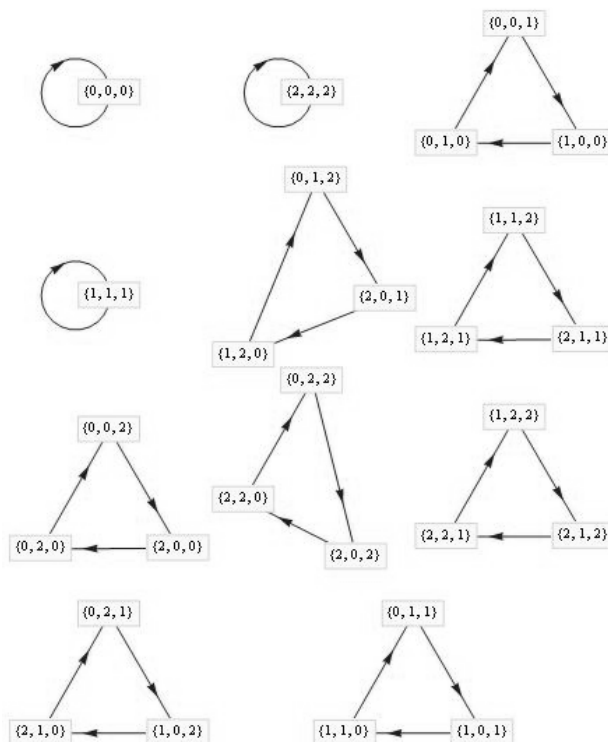


Figura 14. Campo de bacias de atração do ACCR 7625403764901, para  $q=3$  e  $n=3$ .

Nota-se claramente na Figura 14 que a topologia do espaço de estados é induzida pelas leis de conservação e reversibilidade, uma vez que apresenta somente órbitas periódicas conservativas. Uma transformação que substitua a configuração pela soma de seus estados reduz o espaço de estados a um conjunto de pontos fixos, como ilustra a Figura 15.

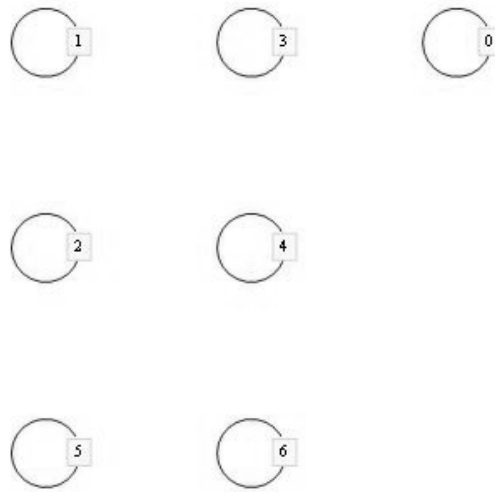


Figura 15. Campo de bacias de atração do ACCR 7625403764901, para  $q=3$  e  $n=3$ , reduzido a um conjunto de pontos fixos.

De fato, considerando a Conjectura 1, intuitivamente espera-se uma dinâmica espaço-temporal trivial dos ACCRs, pois qualquer ACCR é uma composição de ACCRs triviais, os quais representam a identidade ou deslocamentos no espaço onde  $n=2$ , fixado  $q$ . Contudo, nenhuma conclusão pode ser estabelecida ainda e mais estudos tornam-se necessários nesse sentido.

Experimentos numéricos considerando as regras da Tabela 1 sugerem que todo ACCR apresenta dinâmica trivial, isto é, composta apenas de funções identidade e deslocamentos. Fixando-se  $q$ , a variação de  $n$  pode implicar em maior velocidade no deslocamento das partículas, conforme evidencia a Figura 16.

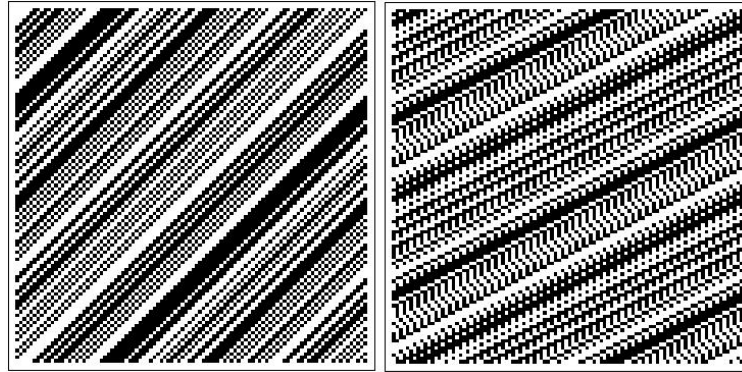


Figura 16. Diagramas espaço-temporais, em 100 iterações, para as regras de número 170 ( $n=3$  e  $q=2$ ) e 2863311530 ( $n=5$  e  $q=2$ ), para uma configuração inicial aleatória de comprimento 100.

Na Figura 16, apresentam-se, respectivamente, os diagramas espaço-temporais das regras de número 170, com  $n=3$  e  $q=2$ , e 2863311530, com  $n=5$  e  $q=2$ . Ambas as dinâmicas são qualitativamente equivalentes, embora o segundo caso apresente maior velocidade de deslocamento das partículas, justamente devido à maior vizinhança de sua função local de transição de estados.

Uma análise dos diagramas espaço-temporais das classes de ACs estudadas neste trabalho sugere uma classificação dinâmica qualitativa, distinta das quatro classes listadas anteriormente, sugerindo uma certa ordem de complexidade, conforme a seguir: ACCRs lineares, ACCRs não-lineares, ACRs, ACCs, e ACs de forma geral. As Figuras de 17 a 21 apresentam diagramas espaço-temporais, bem como campos de bacias de atração para ACs de cada uma dessas classes, de forma a evidenciar a classificação.

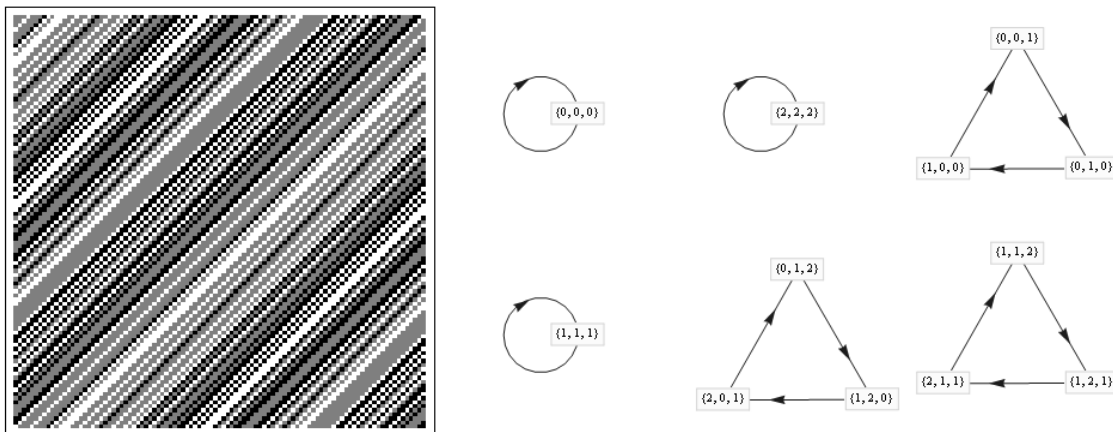


Figura 17. Diagrama espaço-temporal para o ACCR linear 6159136430181 ( $n=3$  e  $q=3$ ) para uma configuração inicial aleatória de comprimento 100 e 100 iterações (à esquerda), e campo de bacias de atração incompleto (à direita).

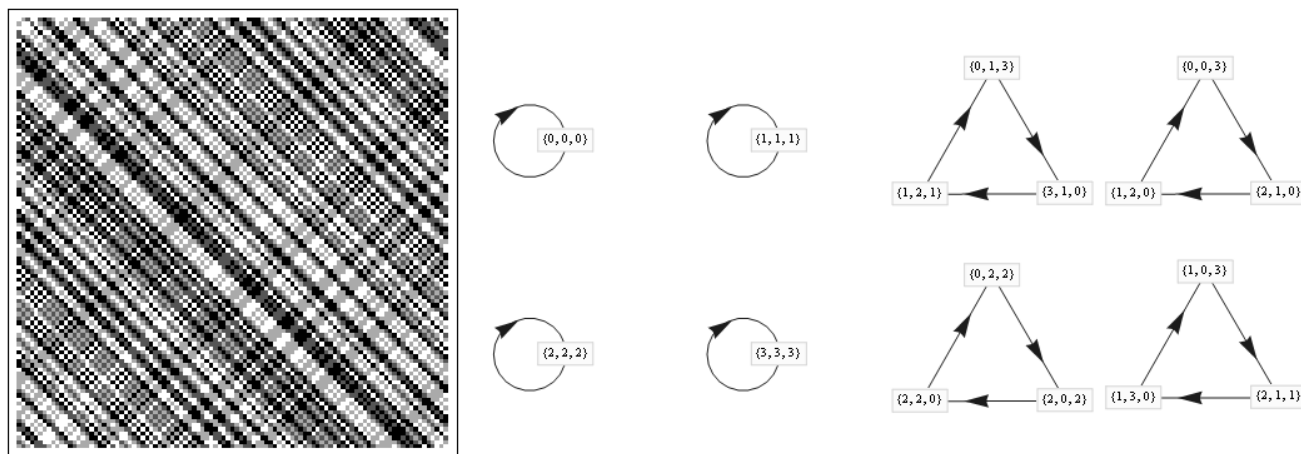


Figura 18. Diagrama espaço-temporal para o ACCR não-linear 317596875792875899220185137553843962948 ( $n=3$  e  $q=4$ ) para uma configuração inicial aleatória de comprimento 100 e 100 iterações (à esquerda), e campo de bacias de atração incompleto (à direita).

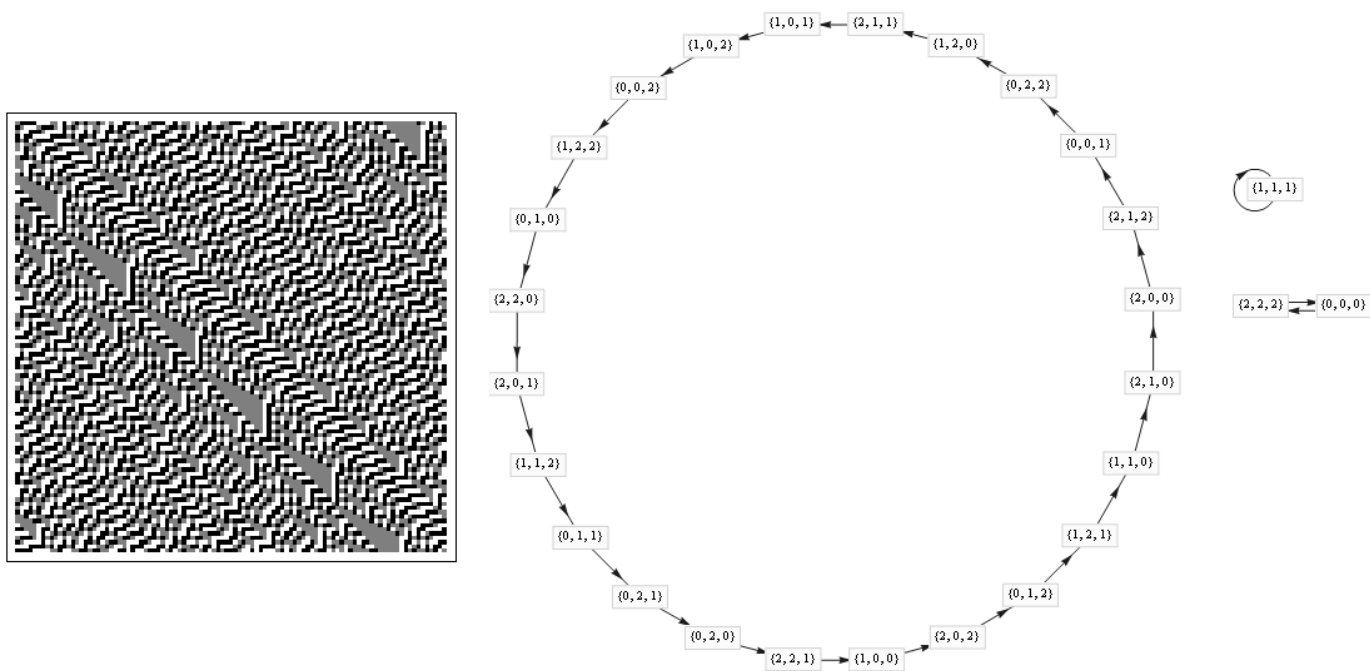


Figura 19. Diagrama espaço-temporal para o ACR 1079 ( $n=2$  e  $q=3$ ) para uma configuração inicial aleatória de comprimento 100 e 100 iterações (à esquerda), e campo de bacias de atração incompleto (à direita).

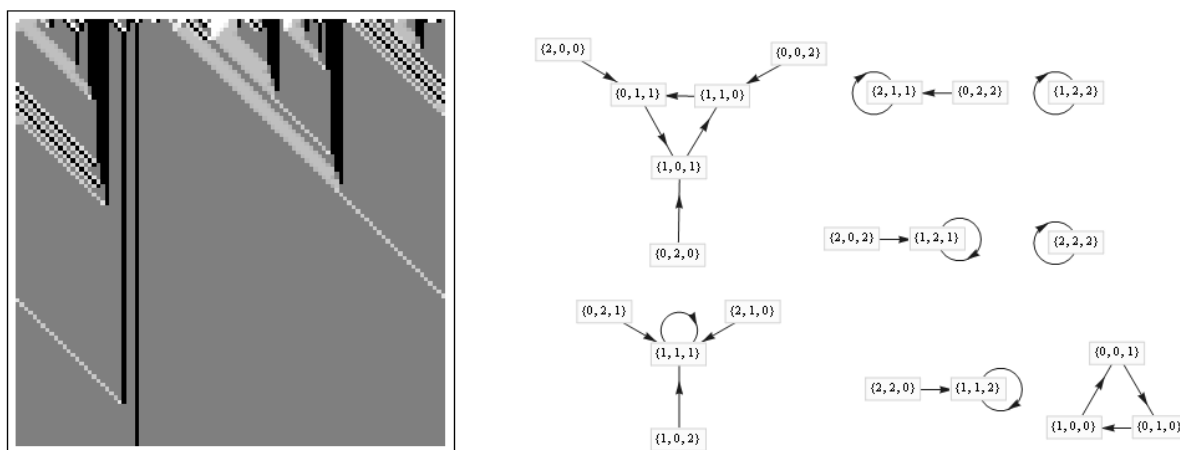


Figura 20. Diagrama espaço-temporal para o ACC 7206774392253 ( $n=3$  e  $q=3$ ) para uma configuração inicial aleatória de comprimento 100 e 100 iterações (à esquerda), e campo de bacias de atração incompleto (à direita).



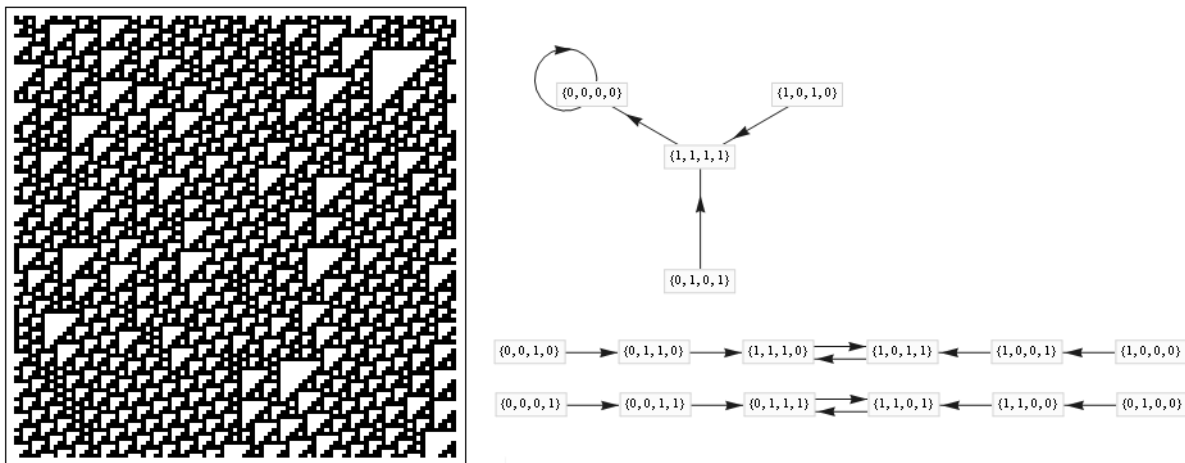


Figura 21. Diagrama espaço-temporal para o AC 110 elementar ( $n=3$  e  $q=2$ ) para uma configuração inicial aleatória de comprimento 100 e 100 iterações (à esquerda), e campo de bacias de atração incompleto (à direita).

Analisando-se as figuras anteriores, as seguintes observações podem ser feitas:

- Figura 17 (ACCR linear): para qualquer configuração, tanto a densidade dos estados, quanto sua soma são preservadas durante a evolução do sistema e também que o diagrama espaço-temporal é composto de deslocamentos à esquerda; portanto, apresenta dinâmica trivial. Outra característica importante é a ausência de configurações *Garden-of-Eden*, devido à reversibilidade.
- Figura 18 (ACCR não-linear): a soma dos estados é preservada durante as iterações do sistema, contudo, a densidade não o é. Além disso, o diagrama espaço-temporal apresenta fluxos que se interceptam. Outra característica importante é a ausência de configurações *Garden-of-Eden*, devido à reversibilidade.
- Figura 19 (ACR): nem a soma dos estados, nem sua densidade são preservadas durante a iteração do sistema; contudo, é claro que, considerando qualquer AC reversível, as únicas estruturas encontradas em seus campos de bacias de atração são ciclos (e, em particular, pontos fixos) a partir de qualquer configuração global. Intuitivamente, o diagrama espaço-temporal também apresenta maior complexidade que os anteriormente apresentados. Outra característica importante é a ausência de configurações *Garden-of-Eden*, devido à reversibilidade.
- Figura 20 (ACC): a soma dos estados é preservada durante as iterações (por definição), entretanto, a densidade de estados não é preservada. Nota-se também que o campo de

bacias de atração é constituído por ciclos com transientes (que podem até ser arbitrariamente longos, apesar de não ser este o caso exemplificado), e também configurações com mais de uma pré-imagem (devido à não-reversibilidade), logo, apresenta configurações *Garden-of-Eden* [Moore, 1962] e [Myhill, 1963].

- Figura 21 (AC genérico): nem a soma dos estados, nem a densidade dos mesmos é preservada durante as iterações. Além disso, a estrutura do campo de bacias de atração não sofre restrições (a menos das existentes na própria definição formal dos ACs [Hedlund, 1969]) e o diagrama espaço-temporal pode apresentar estruturas localizadas complexas e longos transientes [Wolfram, 2002]. Vale notar que o AC mostrado pertence à Classe-IV de Wolfram e é computacionalmente universal [Wolfram, 2002], além disso, apresenta configurações *Garden-of-Eden*.

A Tabela 3 sintetiza as observações acima apresentadas:

Classe	Propriedade		
	Conserva a soma dos estados	Apresenta configurações <i>Garden-of-Eden</i>	Conserva a densidade dos estados
ACCR linear	SIM	NÃO	SIM
ACCR não-linear	SIM	NÃO	NÃO
ACR	NÃO	NÃO	NÃO
ACC	SIM	SIM	NÃO
AC genérico	NÃO	SIM	NÃO

Tabela 3. Propriedades por classe de ACs.

Sabe-se que tanto ACRs [Morita, 2007] quanto ACCs [Moreira, 2003] e ACs [Wolfram, 2002] podem apresentar computabilidade universal. ACCRs lineares são de fato demasiado simples e provavelmente não apresentam tal propriedade. Dessa forma, surgem naturalmente as seguintes questões: existiriam ACCRs não-lineares computacionalmente universais? E que linguagem são capazes de reconhecer? De fato, análise dos diagramas espaço-temporais de ACCRs não-lineares, para uma quantidade relativamente pequena de estados, sugere a não existência de um ACCR não-linear que apresente tal propriedade, uma vez que as dinâmicas apresentadas são demasiado simples para permitirem a modelagem de mecanismos que emulem a Máquina de Turing. Contudo, nada ainda pode-se afirmar com relação à dinâmica espaço-temporal de ACCRs não-lineares considerando-se um maior número de estados. Assim, tal qual outros pontos aqui discutidos, essa questão ainda demanda investigações adicionais.