

Rodrigo da Silva Freitas

*Explorando a Noção de Reversibilidade  
Parcial de Autômatos Celulares  
Elementares em Reticulados Cíclicos*

Texto de dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como requisito das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Orientador:

Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira

UNIVERSIDADE PRESBITERIANA MACKENZIE

São Paulo

2010

F866e Freitas, Rodrigo da Silva

Explorando a noção de reversibilidade parcial de autômatos celulares elementares em reticulados cíclicos. / Rodrigo da Silva Freitas – 2010.

68f.: il.; 30 cm

Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2010.

Bibliografia: f.66-68.

1. Autômatos celulares. 2. Regras reversíveis. 3. Regras parcialmente reversíveis. 4. Padrão de reversibilidade. I. Título.

CDD 511.3

Rodrigo da Silva Freitas

*Explorando a Noção de Reversibilidade  
Parcial de Autômatos Celulares  
Elementares em Reticulados Cíclicos*

Texto de dissertação apresentado ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica como requisito das exigências para obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica

Aprovada em:

BANCA EXAMINADORA

---

Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira – Orientador  
Universidade Presbiteriana Mackenzie

---

Prof. Dr. Leandro Nunes de Castro – Examinador Interno  
Universidade Presbiteriana Mackenzie

---

Prof. Dr. Antonio Carlos Roque da Silva Filho – Examinador Externo  
Universidade de São Paulo, FFCLRP - Ribeirão Preto

*Aos meus pais, Nilce da Silva Freitas e Carlos Roberto de Freitas, meus exemplos de vida, e, a todos aqueles que me apoiaram ao longo deste trabalho.*

# *Agradecimentos*

*Agradecer a todos que ajudaram a construir este trabalho não é tarefa fácil. O maior perigo que se coloca para o agradecimento seletivo não é decidir quem incluir, mas decidir quem não mencionar. Segue, então, uma pequena lista.*

*Aos meus pais, meu irmão Luccas e a minha querida Priscila que tanto tiveram de aturar o estresse decorrente da quantidade de trabalho para este projeto.*

*Ao Prof. Dr. Pedro Paulo Balbi de Oliveira, professor e orientador, pelas diversas críticas e sugestões neste trabalho.*

*Aos companheiros de trabalho pelo constante apoio e incentivo.*

*À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo projeto de pesquisa Processo 2005/04696-3, à Wolfram Research, através do Mathematica Academic Grant 1149, e ao Fundo Mackenzie de Pesquisa (MackPesquisa), por projeto de pesquisa através do Edital 2007, todos concedidos a meu orientador.*

*Enfim, a todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para o desenvolvimento deste trabalho.*

*“Decido que a morte era o sentido secreto de minha vida,  
que vivi para morrer;  
morro para testemunhar que era impossível viver;  
meus olhos apagarão o mundo e o fecharão para sempre.”*

*(Jean-Paul Sartre, Com a morte na alma)*

# *Resumo*

Os autômatos celulares têm sido estudados como modelos computacionais de diversas formas. Diversas de suas propriedades têm sido amplamente exploradas, entre elas destacando-se a reversibilidade. Esta propriedade é capaz de fornecer a um autômato celular a possibilidade de ter sua evolução temporal refeita para trás no tempo, independentemente de sua configuração inicial, através de um autômato celular inverso. A reversibilidade é um conceito tão bem caracterizado que muitos resultados fundamentais associados a ela têm sido obtidos, tais como o desenvolvimento de algoritmos para enumerar todos os autômatos celulares unidimensionais reversíveis e a indecidibilidade desta propriedade para autômatos celulares com dimensão maior que 1. A ideia principal deste trabalho é introduzir um novo conceito envolvendo a capacidade de reversibilidade de um autômato celular, o conceito de reversibilidade parcial, que é analisado com base nas pré-imagens de todas as configurações iniciais de uma regra, até um determinado tamanho de reticulado. Este novo conceito pode ser útil em buscas evolutivas de autômatos celulares reversíveis, a fim de permitir a utilização de autômatos celulares em tarefas associadas de alguma forma ao grau de reversibilidade de uma regra, ou ainda, em aplicações onde as regras reversíveis são comprovadamente empregadas, tal como em criptografia. Para tanto, alguns parâmetros supostamente relacionados à reversibilidade são estudados e comparados, e medidas empíricas (lexicográficas e numéricas) são abordadas. Os resultados obtidos envolvendo essas medidas empíricas mostraram que é possível referir-se a uma regra mais parcialmente reversível do que outra, além de revelar propriedades, até então desconhecidas, envolvendo as pré-imagens das regras elementares.

**Palavras-chave:** Autômatos celulares; regras reversíveis; regras parcialmente reversíveis; padrão de reversibilidade; espaço elementar.

# *Abstract*

Cellular automata have been studied as computer models in many different forms. Several of its properties have been widely explored, among which reversibility stands out. This property is able to provide a cellular automaton the possibility of having their temporal evolution regenerated backward in time, regardless of its initial configuration, through an inverse cellular automaton. Reversibility is such a well characterized concept that many fundamental results associated with it have been obtained, such as the development of algorithms to enumerate all reversible one-dimensional cellular automata and the undecidability of this property for cellular automata in dimensions larger than 1. The driving force for the present research is to introduce a new concept involving the reversibility ability of a cellular automaton, the concept of partial reversibility, which is analysed herein according to the pre-images of all initial configurations of a rule, up to a certain length. This new concept may be useful for evolutionary searches for reversible cellular automata, to allow the use of cellular automata in tasks related somehow to the reversibility degree of a rule, or in applications where reversible rules are demonstrably employed, such as in cryptography. To that end, some parameters presumably related to reversibility are studied and compared, and empirical measures (lexicographical and numerical) are addressed. The results involving these empirical measures, showed that is possible to refer to a more partially reversible rule than another, besides revealing properties, apparently unknown so far, involving the pre-images of elementary rules.

**Keywords:** Cellular automata; reversible rules; partially reversible rules; reversibility pattern; elementary space.



# *Lista de Figuras*

2.1	Notação de Wolfram para os autômatos celulares elementares. . . . .	14
2.2	Diagrama espaço-temporal da regra 30, num total de 50 passos de execução. . . . .	14
2.3	Bacias de atração de algumas regras do espaço elementar. . . . .	16
2.4	Casos triviais de regras reversíveis. . . . .	18
2.5	Campos de bacias de atração das pré-imagens dos blocos fundamentais da regra 11. . . . .	23
4.1	Posição de cada conjunto de regra para todo tamanho de reticulado $n_{max}$ de 1 até 18, considerando o modelo de ordenação direta. . . . .	47
4.2	Posição de cada conjunto de regra para todo tamanho de reticulado $n_{max}$ de 1 até 18, considerando o modelo de ordenação absoluta. . . . .	48
4.3	Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 1. . . . .	55
4.4	Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 2. . . . .	56
4.5	Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 3. . . . .	57
4.6	Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 4. . . . .	58
4.7	Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 5. . . . .	59
4.8	Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 6. . . . .	60
4.9	Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 7. . . . .	62

# *Lista de Tabelas*

3.1	Valores de $Z$ e $\alpha$ das regras reversíveis. . . . .	25
3.2	Valores de $\alpha$ e do grau de reversibilidade das regras do espaço elementar. . . . .	28
3.3	Listas de regras ordenadas. . . . .	29
3.4	Valores encontrados na comparação (I) entre $\mathcal{L}_\alpha$ e $\mathcal{L}_R$ para as regras que apresentaram o menor valor de $\alpha$ . . . . .	31
3.5	Valores encontrados na comparação (II) entre $\mathcal{L}_\alpha$ e $\mathcal{L}_{R'}$ para as regras que apresentaram o menor valor de $\alpha$ . . . . .	32
3.6	Listas de regras ordenadas “manualmente”. . . . .	33
3.7	Valores encontrados na comparação (III) entre $\mathcal{L}_\alpha$ e $\mathcal{L}_R$ para as regras que apresentaram o menor valor de $\alpha$ . . . . .	34
3.8	Valores encontrados na comparação (IV) entre $\mathcal{L}_\alpha$ e $\mathcal{L}_{R'}$ para as regras que apresentaram o menor valor de $\alpha$ . . . . .	35
3.9	Resumo dos valores de $d$ no experimento com $\alpha$ . . . . .	36
3.10	Lista de regras ordenadas pelo valor de $\alpha'$ . . . . .	37
3.11	Valores encontrados na comparação entre $\mathcal{L}_{\alpha'}$ e $\mathcal{L}_R$ para as regras que apresentaram o menor valor de $\alpha'$ . . . . .	37
3.12	Valores encontrados na comparação entre $\mathcal{L}_{\alpha'}$ e $\mathcal{L}_{R'}$ para as regras que apresentaram o menor valor de $\alpha'$ . . . . .	38
3.13	Resumo dos valores de $d$ no experimento com $\alpha'$ . . . . .	39
4.1	Ordenação lexicográfica direta e absoluta do espaço elementar, para os dois limites superiores de reticulado citados em [Wolfram, 2002]. . . . .	44
4.2	<i>Padrão de reversibilidade</i> da regra elementar 105 com tamanho máximo de reticulado $n_{max} = 6$ . . . . .	45
4.3	Conjuntos de regras do espaço elementar gerados por $\alpha^p$ , $\alpha$ e $Z$ . . . . .	50

4.4	Número de configurações iniciais de tamanho $n$ que possuem uma certa quantidade de pré-imagens, para a regra elementar 3. . . . .	51
-----	--	----

# *Lista de Abreviaturas e Siglas*

<b>AC</b>	Autômato Celular
<b>GoE</b>	<i>Garden of Eden</i>
<b>ACR</b>	Autômato Celular Reversível
<b>CI</b>	Configuração Inicial
<b>PR</b>	Padrão de Reversibilidade

# *Sumário*

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>10</b>
<b>2</b>	<b>Autômatos Celulares</b>	<b>12</b>
2.1	Introdução	12
2.2	Definição	12
2.3	Comportamento dinâmico dos autômatos celulares	15
2.4	Autômatos celulares reversíveis	17
2.4.1	Reversibilidade parcial	19
2.4.2	A relação das pré-imagens com a reversibilidade	19
2.5	Parâmetro $Z$	20
2.6	Parâmetro $\alpha$ e suas variações	22
<b>3</b>	<b>Experimentos preliminares: Elementos para um modelo teórico</b>	<b>24</b>
3.1	Correlação entre os parâmetros $Z$ e $\alpha$	25
3.1.1	Correlação entre os parâmetros $Z$ e $\alpha$ das regras das classes de equivalência	26
3.1.2	Correlação entre o parâmetro $Z$ e o parâmetro $\alpha'$	26
3.2	Correlação entre o parâmetro $\alpha$ e o grau de reversibilidade	27
3.2.1	Correlação entre o parâmetro $\alpha$ e o grau de reversibilidade das regras das classes de equivalência	28
3.2.2	Correlação entre o parâmetro $\alpha'$ e o grau de reversibilidade	28
3.2.3	Similaridade entre listas de regras ordenadas por $\alpha$ e pelo grau de reversibilidade	29

3.2.4	Similaridade entre listas de regras ordenadas por $\alpha'$ e pelo grau de reversibilidade . . . . .	36
<b>4</b>	<b>Reversibilidade Parcial: Construção de modelos empíricos e teóricos .</b>	<b>40</b>
4.1	Definição do padrão de reversibilidade . . . . .	41
4.2	Reversibilidade parcial no espaço elementar . . . . .	42
4.3	Relacionando a reversibilidade parcial com parâmetros dos ACs . . . . .	49
4.4	Medidas numéricas baseadas na noção de reversibilidade parcial . . . . .	53
<b>5</b>	<b>Conclusão . . . . .</b>	<b>63</b>
	<b>Referências . . . . .</b>	<b>66</b>

# 1 *Introdução*

Uma propriedade dos autômatos celulares (ACs) muito estudada é a reversibilidade, que é a propriedade que algumas regras possuem de terem sua evolução temporal capaz de ser refeita para trás no tempo, independentemente de sua configuração inicial, ao executar-se a regra inversa da original [Toffoli e Margolus, 1990]. A reversibilidade num autômato celular é um conceito tão bem caracterizado que tem sido possível obter diversos resultados fundamentais associados a ele, tais como o problema da propriedade de indecidibilidade para ACs de dimensão maior do que 1 [Kari, 2005], algoritmos para enumerar todos os ACs unidimensionais reversíveis [Boykett, 2004], etc.

Como definir uma noção de reversibilidade parcial de maneira que seja possível que regras dos autômatos celulares sejam comparadas entre si em termos de seu grau de reversibilidade? O objetivo deste trabalho é apresentar um novo conceito envolvendo a capacidade de reversibilidade das regras dos autômatos celulares, seja esta capacidade mínima ou máxima, trazendo o novo conceito de reversibilidade parcial de uma regra.

Com o intuito de atingir este objetivo, toda análise realizada é baseada nas configurações iniciais de um determinado AC, se elas são reversíveis ou não. Além disso, para simplificar, o espaço de regras analisadas foi restringido somente para os ACs elementares, isto é, o conjunto de ACs unidimensionais com 2 estados possíveis por célula e uma vizinhança de 3 células, o que compreende um total de 256 regras. Todavia, pode-se estender este conhecimento a partir deste espaço para qualquer outro espaço unidimensional.

Uma segunda motivação para definir esta noção de reversibilidade é a possibilidade de apresentar a noção em si, avaliando as possíveis maneiras de medi-la, possíveis modelos teóricos que podem auxiliar a medida, sua relação com outras propriedades dos ACs, tal como o comportamento dinâmico. E, devido ao fato de não existir um algoritmo para estabelecer a reversibilidade dos autômatos celulares em dimensões maiores que 1, a possibilidade de desenvolver uma medida para o grau de reversibilidade parcial de uma regra, pode ser certamente útil, pois poderia ajudar a apontar para regras específicas que

podem possuir uma chance de serem reversíveis.

A reversibilidade é uma propriedade encontrada somente em algumas regras específicas em qualquer dimensão; por exemplo, para as regras do espaço elementar, das 256 regras possíveis somente 6 delas são reversíveis. Logo, olhando por uma perspectiva de aplicação, a ideia em definir a reversibilidade parcial aparenta ser muito atrativa; por exemplo, assim como a reversibilidade tem tido um papel grande na concepção de algoritmos para serem utilizados em criptografia (tais como [Kari, 1992] e [Seredynski, Pienkosz e Bouvry, 2004]), pode-se eventualmente pensar na elaboração de algoritmos baseados na noção de reversibilidade parcial para o mesmo objetivo, com a vantagem de que possa ser possível reunir um número muito maior de regras com essas características para estes algoritmos.

Desta maneira, o principal foco deste trabalho é introduzir o novo conceito de reversibilidade parcial das regras, isto é, a possibilidade de diferenciar regras de acordo com seu respectivo grau de reversibilidade.

O capítulo a seguir apresenta um referencial teórico sobre autômatos celulares, além de apresentar uma prévia do conceito estudado neste trabalho, discutindo também como verificar a reversibilidade dos ACs unidimensionais através de suas pré-imagens, bem como a relação desta característica com dois parâmetros que podem ser definidos para um AC. O capítulo seguinte descreve alguns experimentos que foram realizados para aprofundar o estudo da relação de alguns parâmetros com a reversibilidade dos ACs. A seguir, o próximo capítulo introduz o conceito de *padrão de reversibilidade (reversibility pattern)* de um autômato celular, o qual é a base para as discussões posteriores sobre reversibilidade parcial. Finalizando, uma conclusão expondo uma análise criteriosa sobre o assunto estudado é apresentada.



## 2 *Autômatos Celulares*

### 2.1 Introdução

A ideia dos autômatos celulares foi introduzida por John von Neumann e Stanislaw Ulam, em meados da década de 40. von Neumann trabalhava em cima do problema de sistemas auto-replicantes, num modelo inicial de um robô que fosse capaz de se copiar sozinho. Ao final, conclui que teria muita dificuldade em criar este robô auto-replicante e que teria um gasto considerável para fornecê-lo todas as peças necessárias para a construção dos “replicantes”. Neste ponto, Ulam sugeriu que von Neumann desenvolvesse seu modelo em torno de uma abstração matemática, como a que ele estava utilizando no estudo do crescimento de cristais [Wolfram, 2002]. Surgia assim o primeiro sistema de autômato celular numa grade de duas dimensões, sendo que, cada célula poderia possuir 29 diferentes estados possíveis.

Em 1968 John Conway iniciou alguns experimentos, motivado, aparentemente, parte por questões lógicas matemáticas e parte por “jogos de simulação”, com diferentes regras de autômatos celulares e por volta de 1970 chegou ao conjunto de regras denominado “Jogo da Vida” [Wolfram, 2002]. Posteriormente, em 1983, com a publicação do primeiro de uma série de artigos de Stephen Wolfram, o interesse no campo dos autômatos celulares teve rápido crescimento e mostra-se em constante evolução atualmente.

### 2.2 Definição

Autômatos Celulares (AC) são sistemas dinâmicos que apresentam tempo, espaço e variáveis de estado discretos. Ele consiste em um reticulado de células, cada uma possuindo um determinado estado, dentro de um número finito, que são atualizadas sincronamente em passos de tempos discretos, baseado numa regra.

Um autômato celular pode ser formalmente definido como uma 4-tupla  $\mathcal{A} = (d, k, N, f)$ , sendo  $d$  a dimensão onde as células estão dispostas, com cada uma possuindo um padrão idêntico de conexões locais para as outras (numa determinada condição de contorno);  $k$  o número de elementos de um conjunto  $\Sigma$  de diferentes possibilidades de estados;  $N = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  representa o vetor de vizinhança constituído por vetores contidos em  $\mathbb{Z}^d$ ; e  $f: k^n \rightarrow k$  é a função de transição de estado local, que fornece o próximo estado para cada célula, atualizando a cada passo de tempo  $t$  o valor de todas do reticulado.

Uma configuração  $c \in k^{\mathbb{Z}^d}$  é um mapeamento que designa um estado único para cada célula localizada em  $\mathbb{Z}^d$ . As células localizadas em  $\vec{x} + \vec{x}_i$  são chamadas de células vizinhas da célula localizada em  $\vec{x}$ . A cada passo uma nova configuração, designada por  $c'$ , é determinada através de:

$$c'(\vec{x}) = f(c(\vec{x} + \vec{x}_1), \dots, c(\vec{x} + \vec{x}_n)), \quad (2.1)$$

ou seja, o novo estado da célula localizada em  $\vec{x}$  é computado aplicando-se a regra local para cada um de seus vizinhos. A regra global  $F: k^{\mathbb{Z}^d} \rightarrow k^{\mathbb{Z}^d}$  é definida ao estabelecer  $F(c) = c'$  no sentido da Equação 2.1.

Desta forma, é possível descrever um autômato celular da seguinte forma: trata-se de um reticulado regular de células, cada uma delas em um estado pertencente a um conjunto pré-determinado; possuindo uma vizinhança, definida sobre este reticulado, indicando para cada célula quais serão consideradas suas vizinhas durante o processo de atualização de estados; o tempo, neste caso, é discreto, e, a cada etapa, todas células têm seus estados atualizados usando uma regra de transição que recebe como entrada o estado de todas as células de sua vizinhança. A configuração da primeira etapa, com  $t = 0$ , sofre então atualizações sucessivas pela aplicação da regra de transição em todas as células na grade, levando a uma evolução determinística ao longo do tempo.

Um autômato celular muito simples existente é o unidimensional, com dois estados possíveis em cada célula, sendo os vizinhos de cada célula definidos como cada célula adjacente ao seu lado. Uma célula e seus vizinhos formam uma vizinhança de três células, logo há  $2^3$  possibilidades de combinações de diferentes vizinhanças. Há também um conjunto de 256 regras possíveis neste espaço, chamadas de regras elementares. Stephen Wolfram propôs um esquema de enumeração para os ACs elementares, no qual os bits de saída são ordenados lexicograficamente, como mostrado na Figura 2.1, e são lidos da direita para esquerda para formar um número de base decimal entre 0 e 255.

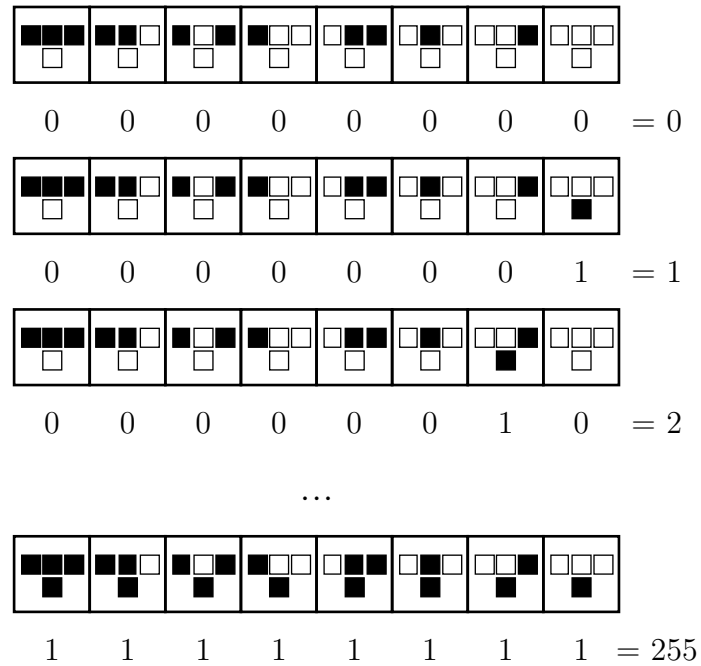


Figura 2.1: Notação de Wolfram para os autômatos celulares elementares.

Em resumo, a ideia da execução de um autômato celular é a seguinte: dada uma configuração inicial de estados e tendo-se definido a vizinhança do autômato e sua dimensão, utiliza-se uma regra como base, de forma que, a cada passo, o valor de todas as células da entrada é atualizado sincronamente. A Figura 2.2 mostra a simulação de um autômato celular utilizando a regra 30 como função de transição, num total de 50 iterações, com uma configuração inicial de valor  $\{0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,1,0,0,0,0,0,0,0,0,0\}$ .

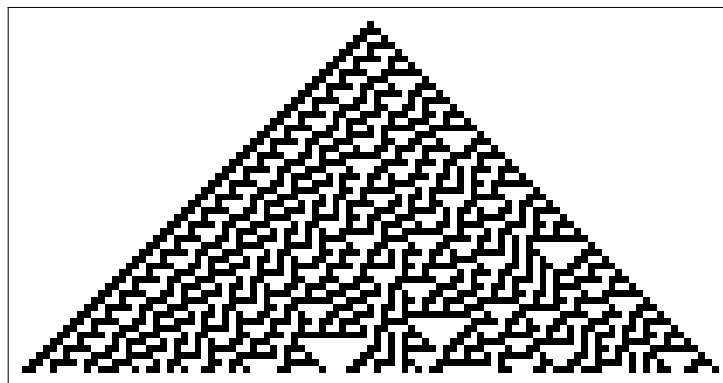


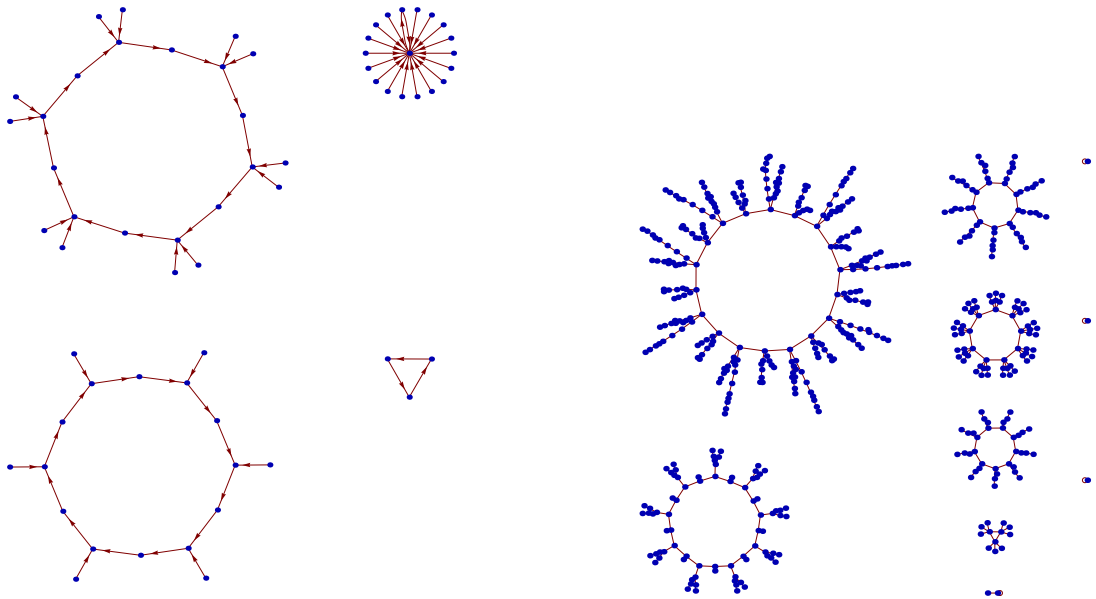
Figura 2.2: Diagrama espaço-temporal da regra 30, num total de 50 passos de execução.

## 2.3 Comportamento dinâmico dos autômatos celulares

Como os autômatos celulares caracterizam-se por utilizar uma regra de estados que determinará o próximo estado a partir de seu estado atual, observa-se que eles apresentam uma variedade de comportamentos dinâmicos. Uma outra característica é que eles são exemplos de sistemas dinâmicos discretos. Assim, por possuir essas características, algumas técnicas para analisar a dinâmica dos ACs foram adaptadas diretamente da análise dos sistemas dinâmicos, como a análise de bacias de atração.

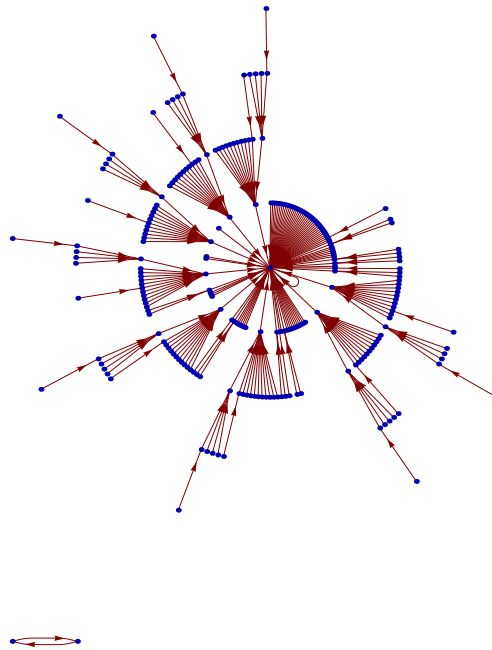
Uma bacia de atração representa o conjunto de todas as trajetórias possíveis, de cada configuração, que levam a um determinado atrator. A Figura 2.3 mostra uma representação gráfica das bacias de atração, geradas através do software Mathematica, de 3 diferentes regras do espaço elementar. O grafo direcionado apresentado em cada uma das figuras mostra cada vértice (●) representando uma configuração diferente para o autômato celular. As arestas mostram a trajetória da evolução temporal de cada uma das configurações.

A Figura 2.3(a) exibe a bacia de atração da regra 3 do espaço elementar com o reticulado de tamanho 6. As Figuras 2.3(b) e 2.3(c) exibem a bacia para as regras 88 e 32 respectivamente, com o reticulado de tamanho 9. Nelas é possível observar o comportamento das trajetórias de cada configuração.



(a) Regra 3 com reticulado de tamanho 6.

(b) Regra 88 com reticulado de tamanho 9.



(c) Regra 32 com reticulado de tamanho 9.

Figura 2.3: Bacias de atração de algumas regras do espaço elementar.

Ainda examinando a Figura 2.3 pode-se observar alguns nós que não possuem nenhuma configuração anterior, ou seja, não possuem outro nó com uma trajetória ligando-se a ele. Esta configuração anterior é denominada de pré-imagem, ou seja, uma determinada configuração que no próximo passo de tempo possuirá o mesmo valor da configuração atual. Portanto, estes nós que não possuem pré-imagens são denominados de estados Jardim-do-Éden (*Garden-of-Eden* (GoE)) [Wuensche e Lesser, 1992].

Outras abordagens para analisar a dinâmica de um autômato celular são:

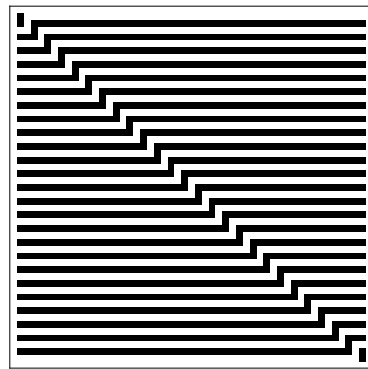
- Observar o comportamento dos diagramas de padrões espaço-temporais gerados a partir de diversos reticulados aleatórios.
- Analisar a regra de transição.

Segundo [Culik, Hurd e Yu, 1990], a previsão dinâmica de um autômato celular unicamente a partir de sua regra, caracteriza-se como um problema indecidível. No entanto, é possível estimar o comportamento dinâmico, de forma que, para auxiliar neste tipo de análise, diversos parâmetros têm sido propostos, que quando utilizados individual ou conjuntamente, ajudam na caracterização do comportamento dinâmico dos ACs; entre eles podem-se citar os parâmetros  $\lambda$ , sensibilidade, atividade absoluta, domínio da vizinhança, propagação de atividade [Oliveira, de Oliveira e Omar, 2001].

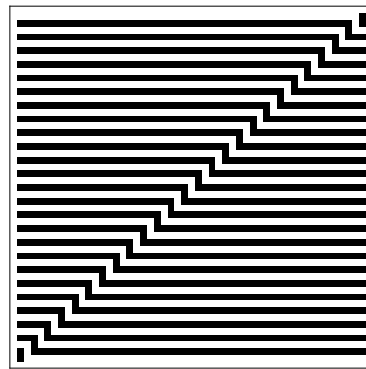
## 2.4 Autômatos celulares reversíveis

Um autômato celular reversível (ACR) é um autômato celular em que sua função global é bijetora e cada configuração possui no máximo um predecessor. Segundo [Kari, 1992], um autômato pode ser considerado reversível se existir um outro autômato celular, denominado de autômato celular inverso, que possa refazer a execução do primeiro autômato para trás. As funções globais destes dois autômatos celulares são inversas entre si.

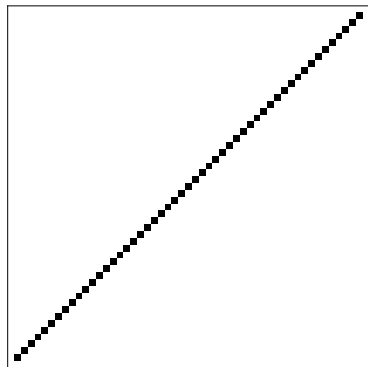
Se um autômato celular é reversível, ele é, portanto, determinístico em ambas direções no decorrer do tempo. A regra que faz o autômato celular “ir para trás” é chamada de regra inversa da regra que faz o autômato celular “ir para frente”. Geralmente a regra inversa apresenta resultado diferente da regra direta quando analisado o comportamento de padrão espaço-temporal, exceto em casos triviais, como por exemplo, nas regras mostradas na Figura 2.4.



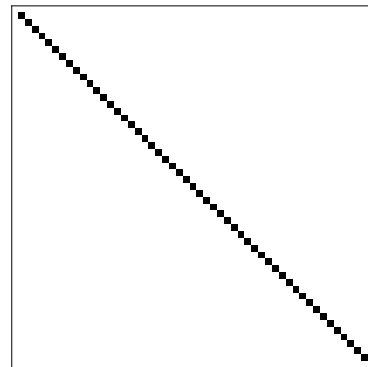
(a) Regra 15.



(b) Regra 85.



(c) Regra 170.



(d) Regra 240.

Figura 2.4: Casos triviais de regras reversíveis.

Num autômato celular  $\mathcal{A} = (d, k, N, f)$ , com  $M_1, M_2, \dots, M_d$  representando números inteiros positivos, e, a posição de todas as células indexada pelos elementos do conjunto  $X = (M_1, M_2, \dots, M_d) = \{0, 1, \dots, M_1 - 1\} \times \{0, 1, \dots, M_2 - 1\} \times \dots \times \{0, 1, \dots, M_d - 1\}$ . Descrevem-se os estados de todas as células de um autômato celular como uma função:

$$c : X \rightarrow k, \quad (2.2)$$

sendo que  $X = \mathbb{Z}^d$ , se o conjunto de células for infinito, ou,  $X = X(M_1, M_2, \dots, M_d)$ , se o número de células for finito. Denota-se  $\mathcal{C}(X, k)$  como sendo o conjunto de todas as configurações possíveis. A regra local  $f$  determina a função global

$$F_f : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}, \quad (2.3)$$

que descreve o comportamento dinâmico do autômato celular. Se nenhuma restrição for imposta na regra local  $f$ , o autômato celular que é definido pode perder informações, ou seja, existem várias configurações que são transformadas numa mesma configuração em um determinado passo. Contudo, algumas regras locais fornecem ao AC a característica

de preservar informação, ou seja, cada configuração possui um único predecessor, sua função global de transição é de “um para um”. Define-se então este autômato celular como bijetor [Kari, 1992].

Evidentemente, um autômato celular reversível possui a característica de preservar informação, mesmo quando o conjunto de células é finito. Ao mesmo tempo o ACR inverso computa utilizando a função de transição global inversa. Isto vem do fato de que qualquer AC opera sobre conjuntos finitos exatamente da mesma maneira que ele opera sobre conjuntos infinitos que são periódicos [Kari, 1992].

É possível, ainda, definir uma classe especial de autômato celular reversível que pode ser executado “para trás” utilizando a mesma regra direta, mas, nesse caso, ele deve utilizar o estado final da execução “para frente” como estado inicial. Esta propriedade é denominada de invariância à reversão do tempo (*time-reversal invariance*) e é considerada como uma propriedade tão importante quanto a própria reversibilidade [Wolfram, 2002]. Em [Wolfram, 2002] esses autômatos celulares reversíveis são definidos de tal forma que o novo estado de uma célula é determinada não somente pela própria célula e seus vizinhos, no passo anterior, mas também pelo estado da própria célula dois passos atrás. Tais autômatos celulares reversíveis não possuem uma regra inversa distinta da regra original.

### 2.4.1 Reversibilidade parcial

Baseada na noção de autômato celular reversível é possível definir uma nova classe de regras, cujo comportamento dinâmico e características gerais são semelhantes às regras reversíveis, mas que apresentam a restrição de não apresentar reversibilidade para todas as configurações iniciais, ou seja, dessa forma pode ocorrer perda de informação na sua utilização. Tais regras são aqui denominadas regras parcialmente reversíveis, uma noção central no presente trabalho e que, aparentemente, ainda não foi introduzida na literatura.

### 2.4.2 A relação das pré-imagens com a reversibilidade

Como descrito anteriormente, um autômato celular é considerado reversível se existir uma regra inversa (da regra em questão) que possa computar toda a evolução temporal realizada por uma regra até o estado inicial do AC, ou seja, computando até a configuração inicial (CI) do autômato celular.

Para estabelecer se uma determinada regra é reversível ou não, todas as configurações iniciais devem possuir somente uma pré-imagem. Para o caso das regras não reversíveis,



algumas configurações iniciais possuem muitas ou nenhuma pré-imagem.

Alguns algoritmos têm sido propostos para computar a quantidade de pré-imagens das configurações dos autômatos celulares, tais como os métodos para ACs unidimensionais descritos em [Jeras e Dobnikar, 2007] ou, ainda que indiretamente, o algoritmo reverso proposto em [Wuensche e Lesser, 1992] e melhorado em [Powley, 2009]. Entretanto optou-se por utilizar uma variação de um método para verificar se um determinado autômato celular unidimensional é reversível ou não descrito em [Wolfram, 2002].

Neste método, todas as configurações iniciais devem ser testadas até um tamanho máximo de reticulado  $n_{max}$ . O que ele efetivamente realiza é verificar quais CIs possuem somente uma pré-imagem. Embora tenha sido provado que o limite máximo (teórico) para este teste é  $n_{max} = k^{2r}(k^{2r} - 1) + 2r + 1$ , sendo que  $k$  representa o número de estados que uma célula pode apresentar e  $r$  representa o raio da vizinhança utilizada. [Wolfram, 2002] afirma que existe uma evidência empírica considerando que deve-se utilizar um valor menor para este limite de teste, com  $n_{max} = k^{2r}$ .

Considerando que o método descrito previamente requiera um esforço computacional significativo, alternativas que demandem um esforço menor devem ser avaliadas, dentre as quais pode-se incluir a possibilidade ideal de obter essas informações diretamente da tabela de transição do autômato celular. Dois parâmetros ( $Z$  e  $\alpha$ ) são apresentados e discutidos posteriormente, pois ambos, por definição estão relacionados com as pré-imagens do AC e, portanto, de alguma forma podem estar relacionados à reversibilidade das regras.

## 2.5 Parâmetro $Z$

O problema de encontrar o conjunto de todos os possíveis estados globais que possam ser gerados a partir de um determinado estado global anterior, ou seja, sua pré-imagem, é reconhecido como um problema muito difícil de ser computado, exigindo muitas vezes, busca exaustiva em todo seu espaço de estados [Wuensche, 1999].

Em [Wuensche e Lesser, 1992] foi proposto um algoritmo que computa diretamente todas as pré-imagens de um estado global ou computa diretamente que o estado atual é um estado conhecido Jardim-do-Éden. Este algoritmo é conhecido como o algoritmo reverso.

De acordo com [Wuensche, 1999], considere um autômato celular unidimensional de tamanho  $n$  e vizinhança  $k$ . Para encontrar todas as pré-imagens de um estado  $A$ , seja

$P$  uma “pré-imagem parcial” possuindo ao menos  $k-1$  bits à sua esquerda, incluindo  $P_i$ . Deseja-se encontrar o próximo bit desconhecido à sua direita,  $P_{i-1}$ , que seja consistente com a regra. Se  $k=3$ , os bits  $P_{i+1}, P_i, P_{i-1}$  correspondem a vizinhanças da tabela da regra. Quando suas saídas,  $T_1$  e  $T_2$ , são comparadas entre si e com  $A_i$ , três possibilidades de substituições podem ocorrer:

**Determinística:** se  $T_1 \neq T_2$ ,  $P_{i-1}$  é unicamente determinado, existindo, portanto, somente uma vizinhança válida com a saída  $A_i$ .

**Ambígua:** se  $T_1 = T_2 = A_i$ , tanto 0 quanto 1 são soluções válidas para  $P_{i-1}$ . A pré-imagem parcial deve ser duplicada, com  $P_{i-1} = 0$  numa versão e  $P_{i-1} = 1$  noutra.

**Proibida:** se  $(T_1 = T_2) \neq A_i$ , então  $P_{i-1}$  não possui uma solução válida.

A probabilidade de o próximo bit  $P_{i-1}$  ser determinístico foi definido como o parâmetro  $Z$ . Duas versões desta probabilidade são calculadas. A primeira,  $Z_{left}$ , é calculada executando o algoritmo reverso da esquerda para a direita. A segunda,  $Z_{right}$ , é calculada executando o algoritmo da direita para a esquerda. O parâmetro  $Z$  é o maior valor entre os dois.

Seja uma vizinhança  $2^k$  de tamanho  $k$ , indexada de 0 a  $k-1$ , cada uma tendo uma saída  $T$  (0 ou 1), que possa ser expressa como  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, a_0 \rightarrow T$ . Para calcular  $Z_{left}$ , seja  $n_k$  a quantidade de entradas na tabela da regra pertencendo a pares determinísticos, sendo que,  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, 0 \rightarrow T$  e  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_1, 1 \rightarrow \bar{T}$ . A probabilidade de que o próximo bit seja determinada por esta regra é dada por  $R_k = \frac{n_k}{2^k}$ . Esta é uma primeira aproximação de  $Z_{left}$ . Seja  $n_{k-1}$  a quantidade de entradas na tabela da regra pertencendo a 4-tuplas determinísticas (com  $\star$  sendo 0 ou 1), sendo que,  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_2, 0, \star \rightarrow T$  e  $a_{k-1}, a_{k-2}, \dots, a_2, 1, \star \rightarrow \bar{T}$ . A probabilidade de que o próximo bit seja determinada por esta regra é dada por  $R_{k-1} = \frac{n_{k-1}}{2^k}$ . Este procedimento é repetido, se necessário, para 8-tuplas determinísticas com  $R_{k-2} = \frac{n_{k-2}}{2^k}$ , 16-tuplas, 32-tuplas, até o caso especial de somente uma  $2^k$ -tupla que ocupa toda a tabela da regra.

A união das probabilidades  $R_k \cup R_{k-1} \cup R_{k-2} \dots = Z_{left}$  é dada pela expressão:

$$\begin{aligned} Z_{left} = & R_k + R_{k-1}(1 - R_k) + R_{k-2}(1 - R_k + R_{k-1}(1 - R_k)) + \\ & R_{k-3}(1 - (R_{k-2}(1 - R_k + R_{k-1}(1 - R_k)))) + \dots \end{aligned} \quad (2.4)$$

que pode ser simplificada para:

$$Z_{left} = R_k + R_{k-1}(1 - R_k) + R_{k-2}(1 - R_{k-1})(1 - R_k) + \\ R_{k-3}(1 - R_{k-2})(1 - R_{k-1})(1 - R_k) + \dots \quad (2.5)$$

e pode ser expressa da seguinte maneira:

$$Z_{left} = R_k + \sum_{i=1}^{k-1} R_{k-i} \left( \prod_{j=k-i+1}^k (1 - R_j) \right) \quad (2.6)$$

sendo que  $R_i = \frac{n_i}{2^k}$  e  $n_i$  é a quantidade de entradas na tabela de regras pertencendo a  $2^{k-1}$ -tuplas. Um procedimento complementar ao anterior produz o valor de  $Z_{right}$ .

A interpretação de  $Z$  é como se segue. O parâmetro  $Z$  fornece a probabilidade de que o próximo estado desconhecido na pré-imagem parcial que está sendo construída (através do algoritmo reverso, a partir de uma configuração dada), possa ser univocamente determinado. Como consequência, ele indica a densidade de configurações globais GoE ou ainda, a densidade de pré-imagens da bacia de atração da regra correspondente. Assim, maiores valores de  $Z$  acarretam menor densidade de configurações GoE e, portanto, bacias de atração menos arbustivas (*bushy*); ou seja, maiores valores de  $Z$  implicam menor quantidade de pré-imagens das configurações globais.

## 2.6 Parâmetro $\alpha$ e suas variações

Com o intuito de responder à questão se existiria alguma relação entre as pré-imagens dos blocos e a reversibilidade dos autômatos celulares unidimensionais, o parâmetro  $\alpha$  foi definido em [Schranks, 2009].

Considere um autômato celular com um número  $k$  de possíveis estados para cada célula (definido sobre um alfabeto  $\Sigma = \{0, 1, \dots, k-1\}$ ), uma vizinhança com  $m$  células e uma regra de transição  $f$ . Assumindo que  $\mathcal{B}_m$  representa o conjunto de blocos (básicos) de tamanho  $m$ , pertencente a  $\Sigma$ , logo o conjunto de pré-imagens de  $\mathcal{B}_m$  é  $\mathcal{B}_{2m-1}$  e o seu tamanho é dado por  $|\mathcal{B}_{2m-1}| = k^{2m-1}$ . Desta forma, em sua forma mais simples, o parâmetro  $\alpha$  pode ser definido da seguinte maneira:

$$\alpha = \frac{1}{k^{2m-1}} \sum_{i \in T} i, \quad \text{com } T = \bigcup_{b \in \mathcal{B}_m} \{|f^{-1}(b)|\} \quad (2.7)$$

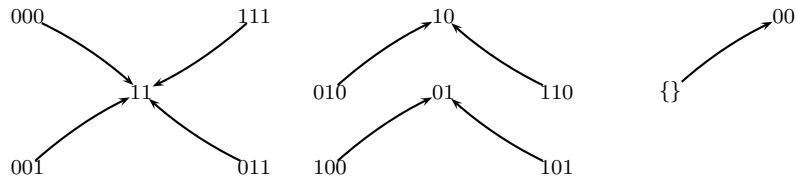


Figura 2.5: Campos de bacias de atração das pré-imagens dos blocos fundamentais da regra 11 [Schranko, 2009].

Para esclarecer a definição apresentada previamente, calculemos o valor de  $\alpha$  para o AC binário de regra 11 com  $m = 2$ . Neste caso, a Figura 2.5 ilustra a situação. Assim sendo,  $\mathcal{B}_2 = \{00, 01, 10, 11\}$  e  $|\mathcal{B}_{2 \times 2-1}| = |\mathcal{B}_3| = 2^3 = 8$ . Aplicando  $f^{-1}$  em cada bloco  $b \in \mathcal{B}_2$  obtemos  $|f^{-1}(00)| = 0$ ,  $|f^{-1}(01)| = 2$ ,  $|f^{-1}(10)| = 2$  e  $|f^{-1}(11)| = 4$ , portanto, unindo os valores de  $|f^{-1}(b)|$ , um dos valores 2 será excluído, sendo que a soma dos valores restantes  $\sum_{i \in \{0, 2, 4\}} i = 6$ , concluindo que  $\alpha = 6/8 = 0.75$ .

Em [Schranko, 2009] também é mostrado que existe uma relação entre  $\alpha$ , a distribuição das pré-imagens em blocos básicos e a reversibilidade, de maneira que, se um autômato celular é reversível, então o número de pré-imagens para cada bloco básico está igualmente distribuído, e  $\alpha$  assume valor mínimo. Naturalmente isto condiz com o fato de que a distribuição de todas as pré-imagens de um AC sobrejetor são balanceadas [Hedlund, 1969].

Repare que, na definição do parâmetro  $\alpha$ , o bloco predecessor associado com os blocos básicos de uma regra, pode ser visto como a pré-imagem requerida para gerar os blocos básicos, numa condição de contorno não periódica. Analogamente, define-se aqui um novo parâmetro, designado como  $\alpha^p$ , que nada mais é do que uma pequena variação do parâmetro  $\alpha$ , com a diferença de que para o caso de  $\alpha^p$  a pré-imagem da possível configuração (ou blocos) é calculada levando-se em conta uma condição de contorno periódica.

Uma vez que  $\alpha$  baseia-se na pré-imagem de cada bloco, pode-se questionar os efeitos de não utilizar a pré-imagem mais recente, mas sim, as pré-imagens da pré-imagem mais recente, ou as pré-imagens das pré-imagens da pré-imagem mais recente. Desta forma, pode-se generalizar a definição do parâmetro  $\alpha$  em questão de nível (ou “ordem”) das pré-imagens consideradas, o que leva a uma noção de uma  $i$ -ésima ordem de  $\alpha$ , sendo que, a definição original de  $\alpha$  seria na verdade  $\alpha$  de 1ª ordem, ou  $\alpha_1$ .

Deve-se deixar claro que, mesmo sendo possível referir-se a  $\alpha^p$  de maior ordem, trata-se de algo que não mostra utilidade, visto que os valores de  $\alpha^p$  são os mesmos para todas as ordens, devido ao fato de que todas as pré-imagens de qualquer ordem são exatamente iguais.

### 3 *Experimentos preliminares: Elementos para um modelo teórico*

Com o objetivo de determinar um conjunto de características para definir regras com comportamento parcialmente reversível, aprofundar o estudo de uma possível aplicação prática (como na área de criptografia por exemplo) e demonstrar o seu comportamento, alguns experimentos foram realizados.

Os experimentos a seguir visaram testar a eficácia de alguns parâmetros dos autômatos celulares supostamente relacionados à reversibilidade: o parâmetro  $Z$  - que mede a quantidade de pré-imagens imposta por uma regra, sendo que, quanto menor o valor de  $Z$  maior a quantidade de pré-imagens; o parâmetro  $\alpha$  - que contabiliza a quantidade de pré-imagens de cada bloco básico de uma regra, sendo que, quanto menor o valor de  $\alpha$  o número de pré-imagens estará igualmente distribuído entre os blocos; e uma medida de reversibilidade, calculada a partir do procedimento descrito em [Wolfram, 2002] - que mede o quão reversível uma regra demonstra ser. Todas essas versões foram implementadas como funções escritas no Mathematica [de Oliveira, 2010].

Todos os cálculos de correlação realizados nestes experimentos utilizaram uma única fórmula, o Coeficiente de Correlação de Pearson [Weisstein, 1995a]. Este método mede o grau e a direção (se positiva ou negativa) da correlação entre duas variáveis de escala métrica, através da seguinte equação:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} \quad (3.1)$$

com  $x_1, x_2, \dots, x_n$  e  $y_1, y_2, \dots, y_n$  sendo os valores das variáveis e  $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  e  $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$  sendo as suas respectivas médias aritméticas. Neste caso o valor de  $r$  pode variar entre  $-1$  e  $+1$ , sendo que  $r = 0$  corresponde então a uma não associação. Quando  $r > 0$  emprega-se o termo **correlação positiva** e, neste caso, à medida que  $x$  cresce  $y$  também cresce,

e, quando  $r < 0$  emprega-se o termo **correlação negativa** e, neste caso, à medida que  $x$  cresce  $y$  decresce. Quanto maior for o valor de  $r$  (positivo ou negativo), mais forte caracteriza-se a associação entre as duas variáveis.

### 3.1 Correlação entre os parâmetros $Z$ e $\alpha$

O primeiro experimento realizado para o estudo de regras reversíveis de ACs foi baseado numa possível correlação entre dois parâmetros: o parâmetro  $Z$  e o parâmetro  $\alpha$ .

Os valores do coeficiente de correlação  $r$  encontrados durante o experimento foram de  $-0.53$  entre  $Z_{left}$  e  $\alpha$ ,  $-0.53$  entre  $Z_{right}$  e  $\alpha$  e  $-0.72$  entre o próprio parâmetro  $Z$  e  $\alpha$ . Com isso, pode-se estabelecer a correlação entre  $Z_{right}$  e  $\alpha$  como uma **correlação negativa moderada**, a correlação entre  $Z_{left}$  e  $\alpha$  também como uma **correlação negativa moderada**, e, a correlação entre  $Z$  e  $\alpha$  como uma **correlação negativa forte**. Portanto, enquanto a correlação entre  $Z_{right}$  e  $\alpha$  e  $Z_{left}$  e  $\alpha$  apresenta resultado moderado, a correlação entre  $Z$  e  $\alpha$  caracteriza-se como mais forte, pela própria característica do cálculo do parâmetro  $Z$  (sempre o maior valor entre  $Z_{left}$  e  $Z_{right}$ ).

Analisando somente as regras reversíveis, os valores dos parâmetros  $Z$  e  $\alpha$  que foram obtidos estão de acordo com a própria definição de cada um. No caso de  $Z$ , o seu valor será sempre máximo (1 tanto para  $Z_{right}$  quanto para  $Z_{left}$ ) para o caso de regras reversíveis, e, para o parâmetro  $\alpha$  será o mínimo (0.125 neste caso). Isto pode ser observado na Tabela 3.1. Contudo, analisando o valor de  $\alpha$  para todas as regras do espaço elementar, observa-se que o valor 0.125 se mantém para todas as regras que apresentam  $Z = 1$ .

Tabela 3.1: Valores de  $Z$  e  $\alpha$  das regras reversíveis.

Regra	Valor de $Z$	Valor de $Z_{right}$	Valor de $Z_{left}$	Valor de $\alpha$
15	1	1	1	0.125
51	1	1	1	0.125
85	1	1	1	0.125
170	1	1	1	0.125
204	1	1	1	0.125
240	1	1	1	0.125

### 3.1.1 Correlação entre os parâmetros $Z$ e $\alpha$ das regras das classes de equivalência

Na tentativa de reforçar o experimento realizado previamente, determinou-se que ele seria repetido somente na primeira regra das classes de equivalência dinâmica. Com esta restrição diminui-se o número de regras de 256 para 88.

Nesta condição, os valores do coeficiente de correlação  $r$  encontrados foram de  $-0.59$  entre  $Z_{left}$  e  $\alpha$ ,  $-0.61$  entre  $Z_{right}$  e  $\alpha$  e, novamente,  $-0.72$  entre o parâmetro  $Z$  e  $\alpha$ . Portanto, a classificação encontrada anteriormente não sofreu alterações e a correlação entre  $Z$  e  $\alpha$  manteve-se como **negativa forte**.

### 3.1.2 Correlação entre o parâmetro $Z$ e o parâmetro $\alpha'$

Explorando uma definição alternativa para o parâmetro  $\alpha$  em que, ao invés de somar os valores distintos da quantidade de blocos de pré-imagens, somente conta-se a quantidade destes valores, o parâmetro  $\alpha'$  foi criado.

$$\alpha' = \frac{1}{|q^{2n-1}|} \left| \bigcup_{b \in \mathcal{B}_n} \{|f^{-1}(b)|\} \right| \quad (3.2)$$

Para o primeiro teste, utilizando as 256 regras do espaço elementar, a correlação entre  $\alpha'$  e  $Z$  foi de  $r = -0.38$ , a correlação entre  $\alpha'$  e  $Z_{left}$  foi de  $r = -0.25$ , e, a correlação entre  $\alpha'$  e  $Z_{right}$  foi de  $r = -0.25$ . Em todos os casos, têm-se, portanto, uma **correlação negativa fraca**.

No segundo teste, utilizou-se somente as 88 regras das classes de equivalência dinâmica. Neste caso a correlação entre  $\alpha'$  e  $Z$  foi de  $r = -0.4$ , a correlação entre  $\alpha'$  e  $Z_{left}$  foi de  $r = -0.31$ , e, a correlação entre  $\alpha'$  e  $Z_{right}$  foi de  $r = -0.32$ . Assim como no teste anterior, também obteve-se uma **correlação negativa fraca**.

## 3.2 Correlação entre o parâmetro $\alpha$ e o grau de reversibilidade

De acordo com os resultados que o experimento da Seção 3.1 apresentou, um segundo experimento foi realizado com o intuito de tentar correlacionar o parâmetro  $\alpha$  com o grau de reversibilidade das regras.

Para medir o grau de reversibilidade das regras utilizaram-se duas versões de cálculo, discutidas em [Wolfram, 2002]. Ambas foram derivadas da função ReversibleQ, que pode ser encontrada em [Wolfram, 2002], que implementa um predicado para testar se uma dada regra de autômato celular é reversível ou não. No caso destas funções implementadas, elas calculam uma porcentagem da quantidade total de configurações iniciais que foram verificadas como não reversíveis, em relação a todas as configurações possíveis, de todos os comprimentos até um certo valor; ou seja, o percentual de configurações iniciais que se mostraram não reversíveis, de um total de  $\sum_{m=1}^n k^m$ , sendo  $k$  o número de estados possíveis das células e  $n$  o comprimento máximo que deve ser considerado.

A primeira versão da função de cálculo do grau de reversibilidade, representada por  $\mathcal{R}$ , utilizou o limite  $n$  empírico, que segundo [Wolfram, 2002], aparenta ser um limite suficiente para determinar se uma regra é reversível ou não. Apesar das evidências, o valor  $n$  teórico é o único que está formalmente estabelecido como comprimento máximo que deve ser testado [Wolfram, 2002]. Dessa forma, ele foi utilizado na segunda versão da função de cálculo do grau de reversibilidade, representada por  $\mathcal{R}'$ . Ressalte-se que este limite formal possibilita maior granularidade nos valores do grau de reversibilidade.

O valor do coeficiente de correlação  $r$  encontrado foi de  $-0.74$  para a correlação entre  $\alpha$  e o grau de reversibilidade  $\mathcal{R}'$  e de  $-0.61$  entre  $\alpha$  e o grau de reversibilidade  $\mathcal{R}$ . Portanto, através deste resultado, ambas as correlações podem ser classificadas como **negativa forte**.

Novamente, analisando os valores obtidos somente nas regras reversíveis conhecidas, observa-se que esses valores são constantes. É possível observar este comportamento através da Tabela 3.2.

Com a alteração no limite superior da função de cálculo do grau de reversibilidade os resultados obtidos tornaram-se mais precisos. Houve uma aproximação muito maior dos valores retornados pela função, ocorrendo inclusive casos em que o valor do grau de reversibilidade aproximou-se muito de 1, como no caso das regras 45,75,89,101,154,166,180,210, entre outras.



Tabela 3.2: Valores de  $\alpha$  e do grau de reversibilidade das regras do espaço elementar.

Regra	Valor de $\alpha$	Valor do Grau de Reversibilidade $\mathcal{R}$	Valor do Grau de Reversibilidade $\mathcal{R}'$
15	0.125	1	1
51	0.125	1	1
85	0.125	1	1
170	0.125	1	1
204	0.125	1	1
240	0.125	1	1

### 3.2.1 Correlação entre o parâmetro $\alpha$ e o grau de reversibilidade das regras das classes de equivalência

Novamente, e, pelas mesmas razões já explicadas, realizou-se um experimento complementar envolvendo o parâmetro  $\alpha$  e o grau de reversibilidade da regra, utilizando somente a primeira regra das classes de equivalência dinâmica.

Neste ambiente de teste, o valor do coeficiente de correlação  $r$  encontrado foi de  $-0.74$  para a correlação entre o parâmetro  $\alpha$  e o grau de reversibilidade  $\mathcal{R}'$  e de  $-0.66$  para a correlação entre o parâmetro  $\alpha$  e o grau de reversibilidade  $\mathcal{R}$ . Portanto, a realização do experimento atuando somente na primeira regra de cada classe de equivalência dinâmica, apresentou o mesmo resultado, confirmando uma **correlação negativa forte** entre as duas variáveis.

### 3.2.2 Correlação entre o parâmetro $\alpha'$ e o grau de reversibilidade

Utilizando o parâmetro  $\alpha'$ , mostrado no experimento 3.1.2, e as 256 regras do espaço elementar, o valor do coeficiente de correlação  $r$  encontrado entre  $\alpha'$  e o grau de reversibilidade  $\mathcal{R}$  foi de  $-0.3$ , classificada como uma **correlação negativa fraca**, e, para a correlação entre  $\alpha'$  e o grau de reversibilidade  $\mathcal{R}'$  foi de  $r = -0.59$ , classificada como **negativa moderada**.

Para um segundo teste, utilizaram-se as 88 regras das classes de equivalência. Neste caso o valor do coeficiente  $r$  encontrado entre  $\alpha'$  e  $\mathcal{R}$  foi de  $-0.38$ , típico de uma **correlação negativa fraca**, e, entre  $\alpha'$  e  $\mathcal{R}'$ ,  $r = -0.59$ , característico de uma **correlação negativa moderada**.

### 3.2.3 Similaridade entre listas de regras ordenadas por $\alpha$ e pelo grau de reversibilidade

Utilizando o conjunto das primeiras regras de cada classe de equivalência dinâmica, mais um experimento foi realizado. Os dados foram organizados em forma de listas que continham a primeira regra de cada classe de equivalência dinâmica e o valor de  $\alpha$  numa lista e o valor do grau de reversibilidade em outra. Para tanto, comparou-se a diferença entre a posição relativa de cada regra em cada uma das listas.

Seja  $\mathcal{P}$  um parâmetro que se pode definir sobre uma regra de autômato celular (por exemplo:  $Z$ ,  $\alpha$ , etc). Seja ainda uma lista de regras  $\mathcal{L}_{\mathcal{P}}$  ordenada, de forma crescente ou decrescente, segundo seus valores correspondentes de  $\mathcal{P}$ , e, sendo que as regras que possuem o mesmo valor de  $\mathcal{P}$  encontram-se agrupadas. Partindo desta premissa, a Tabela 3.3 contém as listas ordenadas por  $\alpha$  e pelo grau de reversibilidade (empírico e teórico).

Tabela 3.3: Listas de regras ordenadas.

Lista ordenada por $\alpha$ ( $\mathcal{L}_{\alpha}$ )		Lista ordenada por $\mathcal{R}$ ( $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$ )		Lista ordenada por $\mathcal{R}'$ ( $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$ )	
Valor de $\alpha$	Regras	Valor de $\mathcal{R}$	Regras	Valor de $\mathcal{R}'$	Regras
1.00000	{0}	0.1333333	{0}	0.0002289	{0}
0.90625	{4, 32}	0.3333333	{90}	0.0147862	{2, 8}
0.84375	{1, 128}	0.3666667	{2, 8, 126}	0.0543229	{24}
0.81250	{12, 24, 34}	0.4000000	{1, 128}	0.0543382	{46}
0.75000	{2, 5, 8, 10, 160}	0.4333333	{18, 24, 36, 46, 72}	0.0544145	{1, 10, 128}
0.71875	{25, 94, 122, 152}	0.5000000	{4, 5, 9, 10, 12, 32, 34, 60, 130, 160}	0.0544450	{4, 12, 32, 34}
0.68750	{3, 36, 126, 136}	0.5333333	{23, 232}	0.1362804	{18, 72}
0.65625	{19, 73, 146, 200}	0.5666667	{22, 37, 94, 104, 122, 164}	0.1363567	{126}
0.62500	{6, 18, 40, 72}	0.6000000	{62, 110}	0.1363872	{36}
0.59375	{9, 14, 22, 33, 37, 37, 42, 104, 130, 132, 164}	0.6333333	{3, 6, 11, 13, 19, 33, 40, 58, 78, 132, 136, 138, 162, 200}	0.1631214	{5, 160}
0.56250	{38, 44, 62, 110}	0.6666667	{26, 30, 38, 44, 74, 106}	0.1634877	{3, 11, 19, 136,

Continua. . .

Continuando...

Lista ordenada por $\alpha$ ( $\mathcal{L}_\alpha$ )		Lista ordenada por $\mathcal{R}$ ( $\mathcal{L}_\mathcal{R}$ )		Lista ordenada por $\mathcal{R}'$ ( $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$ )	
Valor de $\alpha$	Regras	Valor de $\mathcal{R}$	Regras	Valor de $\mathcal{R}'$	Regras
					{138, 200}
0.53125	{11, 138}	0.7000000	{25, 73, 146, 152}	0.1755882	{9, 130}
0.50000	{26, 41, 54, 58, 74, 78, 78, 108, 134}	0.7333333	{14, 27, 28, 42, 43, 50, 54, 56, 57, 76, 77, 108, 142, 156, 172, 178}	0.1871853	{6, 40}
0.46875	{13, 28, 50, 56, 76, 162}	0.7666667	{7, 35, 41, 134, 140, 168}	0.2055727	{23, 232}
0.43750	{7, 168}	0.8000000	{45, 105, 150, 154}	0.2056032	{77, 178}
0.40635	{23, 77, 178, 232}	0.8666667	{29, 184}	0.2057558	{13, 33, 132, 162}
0.37500	{27, 46, 57, 156, 172}	1.0000000	{15, 51, 170, 204}	0.3117466	{38, 44}
0.31250	{29, 184}			0.3118534	{14, 28, 42, 50, 56, 76}
0.25000	{35, 43, 140, 142}			0.3118686	{27, 172}
0.12500	{15, 30, 45, 51, 60, 90, 105, 106, 150, 154, 170, 204}			0.3120212	{43, 142}
				0.3120823	{29, 184}
				0.3825953	{58, 78}
				0.3827784	{54, 108}
				0.3828242	{7, 35, 140, 168}
				0.3988311	{94, 122}
				0.4166692	{90}
				0.4279916	{73, 146}
				0.4377880	{26, 74}
				0.4455397	{41, 134}
				0.4505295	{25, 152}
				0.4555803	{57, 156}
				0.4723655	{62, 110}
				0.4882351	{22, 104}
				0.4907224	{37, 164}
				0.5000000	{60}
				0.5714286	{105, 150}
				0.9488052	{30, 106}
				0.9961241	{45, 154}
				1.0000000	{15, 51, 170, 204}

Como pode ser observado na Tabela 3.3, os tamanhos das listas geradas foram diferentes entre si. Desta forma necessitou-se de uma normalização (de fato, uma mudança de escala) na lista de menor tamanho. Esta mudança de escala é obtida através de um fator multiplicativo  $> 1$  sobre a posição de cada regra na lista de menor tamanho, o que é dado por:

$$N[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] = \frac{\max[|\mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_2|]}{\min[|\mathcal{L}_1|, |\mathcal{L}_2|]}, \quad (3.3)$$

$$i_{\mathcal{L}_{\max}} = N[\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2] i_{\mathcal{L}_{\min}}, \quad (3.4)$$

sendo que,  $i_{\mathcal{L}_{\min}}$  é a posição da regra na lista menor.

Na comparação (I) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_\mathcal{R}$ , como o tamanho de  $\mathcal{L}_\mathcal{R} < \mathcal{L}_\alpha$ , a similaridade entre as duas listas é aqui definida como:

$$d_{\mathcal{L}} = |i_{\mathcal{L}_\alpha} - i_{\mathcal{L}_\mathcal{R}}|. \quad (3.5)$$

Tabela 3.4: Valores encontrados na comparação (I) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_\mathcal{R}$  para as regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha$ .

Regra	Valor de $\alpha$	Valor de $\mathcal{R}$	$i_{\mathcal{L}_\alpha}$	$i_{\mathcal{L}_\mathcal{R}}$	$d$
15	0.12500	1.0000000	20	20	0
30	0.12500	0.6666667	20	12	8
45	0.12500	0.8000000	20	17	3
51	0.12500	1.0000000	20	20	0
60	0.12500	0.5000000	20	7	13
90	0.12500	0.3333333	20	2	18
105	0.12500	0.8000000	20	17	3
106	0.12500	0.6666667	20	12	8
150	0.12500	0.8000000	20	17	3
154	0.12500	0.8000000	20	17	3
170	0.12500	1.0000000	20	20	0
204	0.12500	1.0000000	20	20	0

Analisando o valor de  $d$  para cada regra reversível, observa-se que para todas essas regras o seu valor foi de 0, e, para regras que apresentaram um baixo valor de  $\alpha$  e um valor de  $\mathcal{R}$  próximo do máximo, o valor de  $d$  variou entre 1 e 3, exceto pelas regras 106, 30, 60 e 90. No geral, com  $|\mathcal{L}_{\max}| = 20$ , o valor de  $d$  variou entre 0 e 8, exceto para as regras 46, 60, e 90 com  $d = 12, 13$  e 18 respectivamente.

Na comparação (II) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$ , como o tamanho de  $\mathcal{L}_\alpha < \mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$ , a similaridade entre as duas listas é calculada por:

$$d_{\mathcal{L}} = |i_{\mathcal{L}_\alpha} - i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}}|. \quad (3.6)$$

Tabela 3.5: Valores encontrados na comparação (II) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$  para as regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha$ .

Regra	Valor de $\alpha$	Valor de $\mathcal{R}'$	$i_{\mathcal{L}_\alpha}$	$i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}}$	$d$
15	0.12500	1.0000000	39	39	0
30	0.12500	0.9488052	39	37	2
45	0.12500	0.9961241	39	38	3
51	0.12500	1.0000000	39	39	0
60	0.12500	0.5000000	39	35	4
90	0.12500	0.4166692	39	26	13
105	0.12500	0.5714286	39	36	3
106	0.12500	0.9488052	39	37	2
150	0.12500	0.5714286	39	36	3
154	0.12500	0.9961241	39	38	1
170	0.12500	1.0000000	39	39	0
204	0.12500	1.0000000	39	39	0

Analisando novamente o valor de  $d$ , ele também ficou em 0 para as regras reversíveis, e, variou entre 1 e 3 para as regras com valor de  $\alpha$  baixo e o valor de  $\mathcal{R}'$  próximo do máximo, exceto para as regras 60 e 90. No geral, com  $|\mathcal{L}_{\max}| = 39$ ,  $d$  variou entre 0 e 19, exceto para a regra 46, que apresentou  $d = 29$ .

Uma outra maneira implementada de obter o valor de  $d$  de cada regra foi, ao invés de utilizar uma normalização matemática, realizar a reordenação das listas maiores num processo de análise visual/“ordenação manual”. Como no processo de normalização, o objetivo aqui também é tornar as listas de mesmo tamanho, mas agora os valores da lista maior são agrupados em valores próximos, segundo um critério informal, ainda que se incorrendo em imprecisão.

Na comparação (III) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_R$ , como  $\mathcal{L}_\alpha > \mathcal{L}_R$ ,  $\mathcal{L}_\alpha$  foi reordenada (Tabela 3.6) utilizando o valor de  $\alpha$  como base. Na comparação (IV) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{R'}$ , como  $\mathcal{L}_{R'} > \mathcal{L}_\alpha$ ,  $\mathcal{L}_{R'}$  foi reordenada (Tabela 3.6) utilizando o valor de  $R'$  como base.

No caso de  $\mathcal{L}_\alpha$ , extraíndo a sétima e a oitava linha da Tabela 3.3, temos que  $i_7 = [0.68750, \{3, 36, 126, 136\}]$ , e,  $i_8 = [0.65625, \{19, 73, 146, 200\}]$ . A diferença entre  $i_7$  e  $i_8$  é de 0.03, evidenciando a proximidade entre os dois valores. Agrupam-se então as regras de  $i_8[1]$  com  $i_7[1]$  mantendo o valor de  $i_7[0]$ . As regras de  $i_9$  não foram agrupadas, pois  $i_7 - i_9 = 0.06$ , constitui uma diferença bem maior do que apenas 0.03. O mesmo critério foi utilizado para agrupar  $i_{10}$  e  $i_{11}$ , e,  $i_{14}$  e  $i_{15}$ .

Tabela 3.6: Listas de regras ordenadas “manualmente”.

Lista de $\alpha$ ( $\mathcal{L}_\alpha$ ) ordenada		Lista de $R'$ ( $\mathcal{L}_{R'}$ ) ordenada	
Valor de $\alpha$	Regras	Valor de $R'$	Regras
1.00000	{0}	0.0002289	{0}
0.90625	{4, 32}	0.0147862	{2, 8}
0.84375	{1, 128}	0.0543229	{24, 46, 1, 10, 128, 4, 12, 32, 34}
0.81250	{12, 24, 34}	0.1362804	{18, 72, 126, 36}
0.75000	{2, 5, 8, 10, 160}	0.1631214	{5, 160, 3, 11, 19, 136, 138, 200, 9, 130}
0.71875	{25, 94, 122, 152}	0.1871853	{6, 40}
0.68750	{3, 36, 126, 136, 19, 73, 146, 200}	0.2055727	{23, 232, 77, 178, 13, 33, 132, 162}
0.62500	{6, 18, 40, 72}	0.3117466	{38, 44, 14, 28, 42, 50, 56, 76, 27, 172, 43, 142, 29, 184}
0.59375	{9, 14, 22, 33, 37, 42, 104, 130, 132, 164, 38, 44, 62, 110}	0.3825953	{58, 78, 54, 108, 7, 35, 140, 168}
0.53125	{11, 138}	0.3988311	{94, 122}
0.50000	{26, 41, 54, 58, 74,	0.4166692	{90}

Continua...

Continuando...

Lista de $\alpha$ ( $\mathcal{L}_\alpha$ ) ordenada		Lista de $\mathcal{R}'$ ( $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$ ) ordenada	
Valor de $\alpha$	Regras	Valor de $\mathcal{R}'$	Regras
	{78, 108, 134}		
0.46875	{13, 28, 50, 56, 76, 162, 7, 168}	0.4279916	{73, 146}
0.40625	{23, 77, 178, 232}	0.4377880	{26, 74}
0.37500	{27, 46, 57, 156, 172}	0.4455397	{41, 134, 25, 152, 57, 156}
0.31250	{29, 184}	0.4723655	{62, 110, 22, 104, 37, 164}
0.25000	{35, 43, 140, 142}	0.5000000	{60}
0.12500	{15, 30, 45, 51, 60, 90, 105, 106, 150, 154, 170, 204}	0.5714286	{105, 150}
		0.9488052	{30, 106}
		0.9961241	{45, 154}
		1.0000000	{15, 51, 170, 204}

O mesmo processo foi realizado utilizando a Tabela 3.6 para  $\mathcal{R}'$ . Neste caso, a quantidade de regras agrupadas foi muito maior, pois o objetivo era ajustar uma lista de tamanho  $|\mathcal{L}_{\max}| = 39$  para  $|\mathcal{L}_{\max}| = 20$ .

Os resultados obtidos neste novo teste comparativo não mostraram muita diferença em relação à normalização original. Seguem os resultados das regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha$ .

Tabela 3.7: Valores encontrados na comparação (III) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$  para as regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha$ .

Regra	Valor de $\alpha$	Valor de $\mathcal{R}$	$i_{\mathcal{L}_\alpha}$	$i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}$	$d$
15	0.12500	1.0000000	17	17	0
30	0.12500	0.6666667	17	11	6
45	0.12500	0.8000000	17	15	2
51	0.12500	1.0000000	17	17	0
60	0.12500	0.5000000	17	6	11
90	0.12500	0.3333333	17	2	15

Continua...

Continuando...

Regra	Valor de $\alpha$	Valor de $\mathcal{R}$	$i_{\mathcal{L}_\alpha}$	$i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}}$	$d$
105	0.12500	0.8000000	17	15	2
106	0.12500	0.6666667	17	11	6
150	0.12500	0.8000000	17	15	2
154	0.12500	0.8000000	17	15	2
170	0.12500	1.0000000	17	17	0
204	0.12500	1.0000000	17	17	0

Tabela 3.8: Valores encontrados na comparação (IV) entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$  para as regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha$ .

Regra	Valor de $\alpha$	Valor de $\mathcal{R}'$	$i_{\mathcal{L}_\alpha}$	$i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}}$	$d$
15	0.12500	1.0000000	20	20	0
30	0.12500	0.9488052	20	18	2
45	0.12500	0.9961241	20	19	1
51	0.12500	1.0000000	20	20	0
60	0.12500	0.5000000	20	16	4
90	0.12500	0.4166692	20	11	9
105	0.12500	0.5714286	20	17	3
106	0.12500	0.9488052	20	18	2
150	0.12500	0.5714286	20	17	3
154	0.12500	0.9961241	20	19	1
170	0.12500	1.0000000	20	20	0
204	0.12500	1.0000000	20	20	0



A reordenação manual das listas não trouxe nenhum ganho para evidenciar a similaridade entre elas. Os valores de  $d$  calculados ficaram em 0 para as regras reversíveis, e, variaram entre 1 e 2 na comparação (III), exceto para as regras 30, 60, 90 e 106. No geral, com  $|\mathcal{L}_{\max}| = 17$ ,  $d$  variou entre 0 e 6, exceto para as regras 46, 60 e 90 com  $d = 9, 11$  e 15 respectivamente.

Na comparação (IV), os valores de  $d$  mantiveram-se em 0 para as regras reversíveis, e, também variaram entre 1 e 3, exceto para as regras 60 e 90. No geral, com  $|\mathcal{L}_{\max}| = 20$ , o valor de  $d$  variou entre 0 e 10, exceto para as regras 43, 46 e 142 com  $d = 11, 14$  e 11 respectivamente.

O teste de correlação de Pearson também foi realizado para as listas ordenadas manualmente/informalmente. Enquanto que o valor de  $r$  encontrado entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_R$  foi de  $-0.99$ , entre  $\mathcal{L}_\alpha$  e  $\mathcal{L}_{R'}$ , obteve-se  $r = -0.95$ . Em ambos os casos, verifica-se  $r$  associado a uma correlação negativa muito forte.

Baseando-se nos valores de  $d$  obtidos nas comparações I, II, III e IV deste experimento, verifica-se que não se alterou para as regras reversíveis, e para as regras com baixo valor de  $\alpha$  e alto grau de reversibilidade o valor não teve diferença significativa com relação às regras reversíveis. Portanto, estes indícios empíricos mostram que o parâmetro  $\alpha$  tem uma forte relação com a reversibilidade dos ACs e que ele pode ser utilizado (talvez em conjunto com outros parâmetros) para apontar regras com comportamento reversível.

Tabela 3.9: Resumo dos valores de  $d$  no experimento com  $\alpha$ .

	$\sum d$	$\bar{d}$	$\sigma_d^2$
Teste I	262	2	8.919
Teste II	641	4	37.516
Teste III	207	2	5.863
Teste IV	374	4	10.488

### 3.2.4 Similaridade entre listas de regras ordenadas por $\alpha'$ e pelo grau de reversibilidade

Novamente, utilizando o conjunto das primeiras regras das classes de equivalência dinâmica, um experimento adicional foi realizado para averiguar a similaridade entre as listas de regras. Porém, neste caso, utilizando o parâmetro  $\alpha'$ . A Tabela 3.10 mostra a

lista criada para  $\alpha'$ .

Tabela 3.10: Lista de regras ordenadas pelo valor de  $\alpha'$ .

Valor de $\alpha'$	Regras
0.15625	{4, 10, 12, 14, 19, 24, 25, 32, 34, 42, 73, 94, 122, 146, 152, 200}
0.12500	{1, 3, 5, 6, 11, 18, 22, 26, 28, 36, 37, 38, 40, 41, 44, 46, 50, 54, 56, 58, 62, 72, 74, 76, 78, 104, 108, 110, 126, 128, 134, 136, 138, 160, 164}
0.09375	{2, 8, 9, 13, 23, 27, 33, 57, 77, 130, 132, 256, 162, 172, 178, 232}
0.06250	{0, 7, 29, 35, 43, 140, 142, 168, 184}
0.03125	{15, 30, 45, 51, 60, 90, 105, 106, 150, 154, 170, 204}

Tanto na comparação entre  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  (Tabela 3.10) e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$  quanto na comparação entre  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$ , como o tamanho de  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  é menor do que  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$  e menor do que  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$ , utilizou-se

$$d_{\mathcal{L}} = |i_{\mathcal{L}_{\alpha'}} - i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}|, \quad (3.7)$$

e,

$$d_{\mathcal{L}} = |i_{\mathcal{L}_{\alpha'}} - i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}}|, \quad (3.8)$$

sendo que  $i_{\mathcal{L}_{\alpha'}}$  utiliza a mesma normalização mostrada na Equação 3.4.

As Tabelas 3.11 e 3.12 mostram os resultados obtidos para as regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha'$ .

Tabela 3.11: Valores encontrados na comparação entre  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}}$  para as regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha'$ .

Regra	Valor de $\alpha'$	Valor de $\mathcal{R}$	$i_{\mathcal{L}_{\alpha'}}$	$i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}$	$d$
15	0.03125	1.0000000	17	17	0
30	0.03125	0.6666667	17	11	6
45	0.03125	0.8000000	17	15	2
51	0.03125	1.0000000	17	17	0

Continua...

Continuando...

Regra	Valor de $\alpha'$	Valor de $\mathcal{R}$	$i_{\mathcal{L}_{\alpha'}}$	$i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}}}$	$d$
60	0.03125	0.5000000	17	6	11
90	0.03125	0.3333333	17	2	15
105	0.03125	0.8000000	17	15	2
106	0.03125	0.6666667	17	11	6
150	0.03125	0.8000000	17	15	2
154	0.03125	0.8000000	17	15	2
170	0.03125	1.0000000	17	17	0
204	0.03125	1.0000000	17	17	0

Tabela 3.12: Valores encontrados na comparação entre  $\mathcal{L}_{\alpha'}$  e  $\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}$  para as regras que apresentaram o menor valor de  $\alpha'$ .

Regra	Valor de $\alpha'$	Valor de $\mathcal{R}'$	$i_{\mathcal{L}_{\alpha'}}$	$i_{\mathcal{L}_{\mathcal{R}'}}$	$d$
15	0.03125	1.0000000	39	39	0
30	0.03125	0.9488052	39	37	2
45	0.03125	0.9961241	39	38	1
51	0.03125	1.0000000	39	39	0
60	0.03125	0.5000000	39	35	4
90	0.03125	0.4166692	39	26	13
105	0.03125	0.5714286	39	36	3
106	0.03125	0.9488052	39	37	2
150	0.03125	0.5714286	39	36	3
154	0.03125	0.9961241	39	38	1
170	0.03125	1.0000000	39	39	0
204	0.03125	1.0000000	39	39	0

Na primeira comparação (I), o valor de  $d$  manteve-se em 0 para as regras reversíveis e  $d = 2$  para as demais, exceto para as regras 30, 60, 90 e 106 com  $d = 6, 11, 15$  e 6 respectivamente. No teste geral, com  $|\mathcal{L}_{\max}| = 17$ , houve grande variação de  $d$ , entre 0 e 10, exceto para as regras 0, com  $d = 12$ , a regra 60, com  $d = 11$ , e a regra 90, com  $d = 15$ .

Na segunda comparação (II), o valor de  $d$  também manteve-se em 0 para as regras reversíveis e variou entre 1 e 3 para as demais, exceto para as regras 60 e 90, com  $d = 4$  e 13 respectivamente. No teste geral, com  $|\mathcal{L}_{\max}| = 39$ ,  $d$  variou entre 0 e 19, exceto para as regras 0, 2, 8, 25, 73, 146 e 152 com  $d = 30, 21, 21, 23, 20, 20$  e 23 respectivamente.

Tabela 3.13: Resumo dos valores de  $d$  no experimento com  $\alpha'$ .

	$\sum d$	$\bar{d}$	$\sigma_d^2$
Teste I	346	3	9.972
Teste II	739	7	42.794

Os valores de  $d$  encontrados neste experimento somente reforçam a conclusão anterior mostrando a forte relação entre o parâmetro  $\alpha$  e a propriedade da reversibilidade dos ACs.

Apesar de [Schranks, 2009] alegar que o parâmetro  $\alpha$  está relacionado a uma condição necessária à reversibilidade dos autômatos celulares unidimensionais e supor sua utilização para a definição de uma medida que caracterize o grau de reversibilidade de uma regra, estes experimentos levaram [de Oliveira e Freitas, 2010] a sugerir que  $\alpha$  talvez possa, na realidade, ser considerado como uma medida do quão sobrejetor um AC pode ser; no entanto, esta avaliação não foi feita aqui, permanecendo como uma possibilidade futura de pesquisa.

## 4 *Reversibilidade Parcial: Construção de modelos empíricos e teóricos*

A reversibilidade, descrita na Seção 2.4, é uma propriedade encontrada somente em algumas poucas regras, sendo que, a quantidade destas regras representa uma pequena parte num conjunto maior, como no caso do conjunto de regras do espaço elementar, onde o conjunto de regras reversíveis possui um tamanho 6 num espaço total de 256 regras.

Obrigatoriamente um autômato celular reversível deve possuir para cada configuração possível de configuração inicial somente uma única pré-imagem.

A característica de reversibilidade parcial parte deste princípio. Ao verificar a proporção de configurações iniciais que possuem somente uma única pré-imagem com as configurações iniciais que possuem mais de uma (ou nenhuma), é possível fazer uma projeção do quão reversível uma determinada regra pode ser.

Desta forma, a análise das pré-imagens de uma regra torna-se algo imprescindível quando decide-se procurar pela propriedade da reversibilidade de uma regra.

Um novo conceito é apresentado neste capítulo, o *padrão de reversibilidade* (PR) (*reversibility pattern*) de uma regra, que representa a base da caracterização da reversibilidade parcial de uma regra e constitui-se em testar todas as configurações iniciais do reticulado, desde seu menor tamanho  $n = 1$  até o tamanho máximo  $n_{max}$ . Esta abordagem é baseada no método descrito previamente na Seção 2.4.2, que verifica se um determinado autômato celular unidimensional é reversível ou não. Uma vez que os testes realizados foram sobre os ACs elementares, para os quais  $k = 2$  e  $r = 1$ , mostra-se que, enquanto o limite máximo teórico de teste é  $n_{max} = 15$ , o valor empírico é  $n_{max} = 4$ .

## 4.1 Definição do padrão de reversibilidade

Com base na premissa de reversibilidade dos ACs, utilizando a informação das pré-imagens das configurações iniciais, uma noção deste comportamento pode ser mostrada através de algumas representações.

Para definir a noção de reversibilidade parcial, todas as configurações iniciais de uma determinada regra com reticulado possuindo uma condição de contorno periódica são analisadas do ponto de vista da quantidade de pré-imagens que cada uma possui.

**Exemplo 1.** Obtendo o *padrão de reversibilidade* sobre a regra 2 do espaço elementar, com  $n_{max}$  empírico, obtemos a seguinte resposta:

$$\{\{2, 2, 2, 2, 8\}, \{1, 1, 1, 5\}, \{4\}, \{2\}\}$$

A resposta do *padrão de reversibilidade* de uma regra é sempre um multiconjunto, para cada tamanho de reticulado calculado, contendo a informação de cada configuração inicial e sua quantidade de pré-imagens.

No caso do exemplo 1, os quatro multiconjuntos retornados representam, respectivamente, os reticulados de tamanho  $n$  igual a 4, 3, 2 e 1. Conseqüentemente,  $\{2, 2, 2, 2, 8\}$  representa que das  $2+2+2+2+8=16$  configurações iniciais de 4 bits, 4 delas não são reversíveis, devido ao fato de que cada uma possui 2 pré-imagens, 1 também não é reversível pois possui 8 pré-imagens, e as 11 CIs remanescentes (que não aparecem explicitamente no multiconjunto) também não são reversíveis, pois são configurações do tipo GoE; similarmente,  $\{1, 1, 1, 5\}$  representa que das  $1+1+1+5=8$  configurações iniciais possíveis de 3 bits, 3 delas são reversíveis por possuírem somente uma pré-imagem cada uma, 1 não é reversível pois possui 5 pré-imagens, e as 4 CIs remanescentes (que também não aparecem explicitamente no multiconjunto) também não são reversíveis, por serem configurações do tipo GoE. Esta análise é realizada sucessivamente, até o último multiconjunto. Naturalmente, para o propósito atual, faz sentido somente considerar os reticulados que tiverem o tamanho maior ou igual ao tamanho da vizinhança utilizada, no exemplo, todos os valores de  $n$  são exibidos por uma questão de simplicidade.

É possível afirmar que a regra 2 do espaço elementar possui um pequeno grau de reversibilidade, ou seja, ela é parcialmente reversível, com base na quantidade de configurações iniciais “reversíveis” ou não.

Contudo, além de trazer um novo conceito, a informação sobre a reversibilidade par-

cial de uma regra introduz uma nova questão. Como afirmar que uma regra é “mais” parcialmente reversível do que outra?

**Exemplo 2.** Como definir qual das regras a seguir é “mais” parcialmente reversível do que a outra?

$$\begin{aligned}
 62 &= \{\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 2, 3\}, \{2, 2\}, \{2\}\} \\
 44 &= \{\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 2\}, \{2, 2\}, \{2\}\} \\
 151 &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 6\}, \{3, 5\}, \{1, 1, 2\}, \{2\}\} \\
 223 &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 10\}, \{1, 1, 1, 5\}, \{1, 1, 2\}, \{2\}\}
 \end{aligned}$$

Considerando as regras elementares citadas no exemplo 2, também utilizando  $n_{max} = 4$ , ao comparar o *padrão de reversibilidade* das regras 62 e 44, é razoável considerar que a segunda é mais reversível do que a primeira, uma vez que elas diferem na informação associada ao reticulado de tamanho  $n = 3$  o que favorece a regra 44. Apesar disso, a comparação entre as regras 151 e 223 já não aparenta ser tão simples, afinal de contas, enquanto a segunda possui um total de 12 CIs reversíveis e a primeira somente 11, a primeira é totalmente não reversível para o reticulado de tamanho  $n = 3$  o que não é o caso da segunda.

Desta forma, o critério que deve ser levado em consideração para possibilitar esta comparação também deve requerer uma investigação. Esta investigação é descrita a seguir, ao analisar a consequência de ordenar as regras do espaço elementar utilizando duas maneiras diferentes.

## 4.2 Reversibilidade parcial no espaço elementar

Sabe-se que, o espaço elementar é contabilizado não somente por suas 256 regras, mas também por suas 88 classes de regras de equivalência dinâmica, cada uma sendo referenciada pela regra de menor valor dentro da classe [Wolfram, 2002]. Naturalmente, tal abordagem é correta, tal que cada regra numa classe possui o mesmo valor de *padrão de reversibilidade*.

Dada a dificuldade em respeito a determinar a reversibilidade parcial entre regras, neste ponto, analisa-se o espaço todo tentando obter uma melhor compreensão sobre a questão. A ideia é obter a reversibilidade parcial de todas as regras do espaço elementar e ordená-las lexicograficamente, a partir (supostamente) da menos reversível para a mais reversível.

Ao menos, para esta medida relativa, baseada na noção de reversibilidade parcial, uma decisão na escolha entre os dois valores de  $n_{max}$  discutidos na Seção 2.4.2 deve ser tomada. Afinal, eles foram considerados como restrições que devem ser respeitadas ao estabelecer a reversibilidade das regras.

Sendo assim, o primeiro modelo de ordenação desenvolvido é uma ordenação padrão, ou seja, ordenada lexicograficamente de forma direta, através do *padrão de reversibilidade* de uma regra. Segundo este modelo, cada parte que compõe o PR é analisada individualmente e, subseqüentemente, é pulado para o próximo, para a análise seguinte; iniciando do primeiro (associado com o reticulado de maior tamanho), e utilizada como base para a ordenação relativa. Esta abordagem é referenciada como modelo de ordenação *direta* das regras segundo seu PR.

**Exemplo 3.** Com o valor empírico  $n_{max} = 4$ , as regras elementares 1, 11 e 27 podem ser ordenadas lexicograficamente, utilizando o modelo de ordenação direta, da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} 1 &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 11\}, \{1, 7\}, \{1, 3\}, \{1, 1\}\} \\ 11 &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}, \{1, 1, 2, 2, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 1\}\} \\ 27 &= \{\{1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3\}, \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}, \{1, 3\}, \{1, 1\}\} \end{aligned}$$

Por outro lado, o segundo modelo de ordenação desenvolvido é baseado na utilização do *padrão de reversibilidade* de uma regra como um único multiconjunto, unindo todas as suas partes, por consequência, sem distinção entre os tamanhos de reticulados. Esta abordagem é referenciada como modelo de ordenação *absoluta*.

**Exemplo 4.** Considerando as mesmas regras utilizadas no exemplo 3 e utilizando o modelo de ordenação lexicográfica absoluta, nota-se que, agora, fica mais evidente que a regra 27 deva ser assumida como mais parcialmente reversível do que as outras, devido ao seu maior número de CIs reversíveis.

$$\begin{aligned} 1 &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 7, 11\} \\ 11 &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3\} \\ 27 &= \{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3\} \end{aligned}$$

Os resultados dos exemplos 3 e 4 foram obtidos, ambos, com o menor valor de  $n_{max}$ . Porém, com o objetivo de mostrar o efeito de utilizar o maior valor, a Tabela 4.1 descreve uma comparação entre os dois modelos.



Tabela 4.1: Ordenação lexicográfica direta e absoluta do espaço elementar, para os dois limites superiores de reticulado citados em [Wolfram, 2002].

Ordenação Direta		Ordenação Absoluta	
$n_{max} = 4$	$n_{max} = 15$	$n_{max} = 4$	$n_{max} = 15$
{0}	{0}	{0}	{0}
{90}	{105, 150}	{90}	{46}
{46}	{24}	{126}	{24}
{2, 8}	{10}	{46}	{36}
{126}	{46}	{24}	{126}
{36}	{12, 34}	{36}	{90}
{24}	{126}	{60}	{60}
{60}	{36}	{2, 8}	{10}
{5, 160}	{90}	{12, 34}	{12, 34}
{9, 130}	{60}	{10}	{2, 8}
{12, 34}	{2, 8}	{18, 72}	{11, 138}
{13, 162}	{11, 138}	{62, 110}	{4, 32}
{57, 156}	{4, 32}	{9, 130}	{1, 128}
{33, 132}	{1, 138}	{1, 128}	{43, 142}
{43, 142}	{43, 142}	{94, 122}	{29, 184}
{94, 122}	{29, 184}	{37, 164}	{18, 72}
{18, 72}	{18, 72}	{11, 13, 58, 78, 138, 162}	{13, 162}
{37, 164}	{13, 162}	{38, 44}	{5, 160}
{10}	{5, 160}	{5, 160}	{3, 19, 136, 200}
{62, 110}	{3, 19, 136, 200}	{4, 32}	{27, 172}
{38, 44}	{27, 172}	{30, 106}	{9, 130}
{1, 128}	{9, 130}	{23, 232}	{6, 40}
{11, 138}	{77, 178}	{22, 104}	{77, 178}
{27, 172}	{6, 40}	{33, 132}	{33, 132}
{4, 32}	{33, 132}	{26, 74}	{23, 232}
{23, 232}	{23, 232}	{25, 152}	{28, 50, 56, 76}
{77, 178}	{28, 50, 56, 76}	{14, 42}	{35, 140}
{30, 106}	{35, 140}	{6, 40}	{38, 44}
{14, 42}	{38, 44}	{54, 108}	{14, 42}
{58, 78}	{14, 42}	{3, 19, 136, 200}	{54, 108}
{28, 50, 56, 76}	{54, 108}	{73, 146}	{58, 78}
{26, 74}	{58, 78}	{27, 28, 50, 56, 57, 76, 156, 172}	{7, 168}
{35, 140}	{7, 168}	{35, 140}	{94, 122}
{41, 134}	{94, 122}	{43, 142}	{26, 74}
{3, 19, 136, 200}	{57, 156}	{41, 134}	{73, 146}
{25, 152}	{26, 74}	{77, 178}	{57, 156}
{73, 146}	{73, 146}	{45, 154}	{41, 134}
{45, 154}	{41, 134}	{7, 168}	{25, 152}
{22, 104}	{25, 152}	{105, 150}	{62, 110}
{6, 40}	{62, 110}	{29, 184}	{37, 164}
{29, 184}	{22, 104}	{15, 51, 170, 204}	{22, 104}
{7, 168}	{37, 164}		{105, 150}
{54, 108}	{30, 106}		{30, 106}
{105, 150}	{45, 154}		{45, 154}
{15, 51, 170, 204}	{15, 51, 170, 204}		{15, 51, 170, 204}

A primeira observação que pode ser feita com relação à Tabela 4.1, é de que, no modelo de ordenação absoluta os resultados obtidos foram bem diferentes dos obtidos no modelo de ordenação direta. Na realidade, pode-se reparar que a lista gerada com  $n_{max} = 4$  contém conjuntos de regras que não foram observados nos outros modelos, e que, esta lista é menor do que a outra gerada com  $n_{max} = 15$ . Além de que, o tamanho da segunda lista do modelo absoluto (45) é exatamente o mesmo tamanho de ambas as lista geradas pelo modelo direto, com todos os conjuntos de regras sendo os mesmos, apesar de que, alguns deles aparecem em posições distintas.

Analisando o modelo de ordenação direta, a Tabela 4.1 também evidencia que a posição do conjunto das regras (lineares)  $\{105, 150\}$ , em ambas as listas, é muito diferente uma da outra. Com o intuito de examinar o motivo deste fenômeno, bastando verificar o PR da regra 105 com  $n_{max} = 15$ , é possível observar que um determinado padrão ocorre em cada reticulado diferente. Esta regra é totalmente reversível para cada tamanho de reticulado que não seja múltiplo de 3, e é não reversível caso contrário, sendo que, nestes casos,  $\frac{1}{4}$  das CIs possuem 4 pré-imagens cada uma e os outros  $\frac{3}{4}$  são configurações do tipo GoE. Este mesmo comportamento também é mencionado em [Powley, 2009].

A Tabela 4.2 ilustra a situação, com um tamanho de reticulado de  $1 \leq n_{max} \leq 6$ . Este é um comportamento intrigante, com nenhuma explicação óbvia no momento.

Tabela 4.2: *Padrão de reversibilidade* da regra elementar 105 com tamanho máximo de reticulado  $n_{max} = 6$ .

$n_{max}$	<i>Padrão de reversibilidade</i>
6	$\{4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4\}$
5	$\{1, 1\}$
4	$\{1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1\}$
3	$\{4, 4\}$
2	$\{1, 1, 1, 1\}$
1	$\{1, 1\}$

Novamente comparando as duas listas do modelo de ordenação direta, da Tabela 4.1, a consequência em utilizar os diferentes valores de  $n_{max}$  são evidentes: quase todos os conjuntos de regras tiveram sua posição alterada de uma lista para outra. Isto significa que, enquanto os limites definidos em [Wolfram, 2002] são suficientes para estabelecer se uma determinada regra é reversível ou não, eles não se aplicam no caso de calcular a reversibilidade parcial.

A fim de verificar a alternância de posição dos conjuntos de regras com a variação de  $n_{max}$ , utilizando valores maiores do que o  $n_{max}$  teórico, as Figuras 4.1 e 4.2 foram criadas. Elas mostram todos os valores de  $n_{max}$  de 1 até 18, traçando uma linha para a posição de todos os conjuntos de regras obtidos na Tabela 4.1 que aparecem, tanto nas listas do modelo de ordenação direta quanto na maior lista do modelo de ordenação absoluta (sendo que, são os mesmos conjuntos de regras em ambos modelos). Quanto maior for a posição de um conjunto mais reversível são suas regras. As posições referem-se, respectivamente, ao modelo de ordenação direta e ao modelo de ordenação absoluta, sendo que, todos os pontos no gráfico para cada  $n_{max}$  representam o resultado do PR para cada tamanho de reticulado de 1 até  $n_{max}$ . A figura mostra que há convergência para a maioria dos conjuntos de regras, e, para aqueles que não há, ao menos se tornam razoavelmente estáveis.

Ao comparar as respostas dos modelos de ordenação lexicográficos através das Figuras 4.1 e 4.2 (ordenação direta e absoluta, respectivamente) pode-se destacar que o modelo de ordenação absoluta apresenta uma resposta onde há muito mais conjuntos de regras agrupadas de acordo com seu grau de reversibilidade parcial convergindo.

Uma grande desvantagem que estes modelos lexicográficos mostraram foi o grande consumo computacional gasto durante o processo de ordenação das regras. Este consumo foi tão alto que inviabilizou a realização de testes com  $n_{max} > 18$ . Desta forma a tentativa de obter a reversibilidade parcial a partir da combinação de alguns parâmetros dos ACs tornou-se atrativa. Isto é apresentado na Seção seguinte.

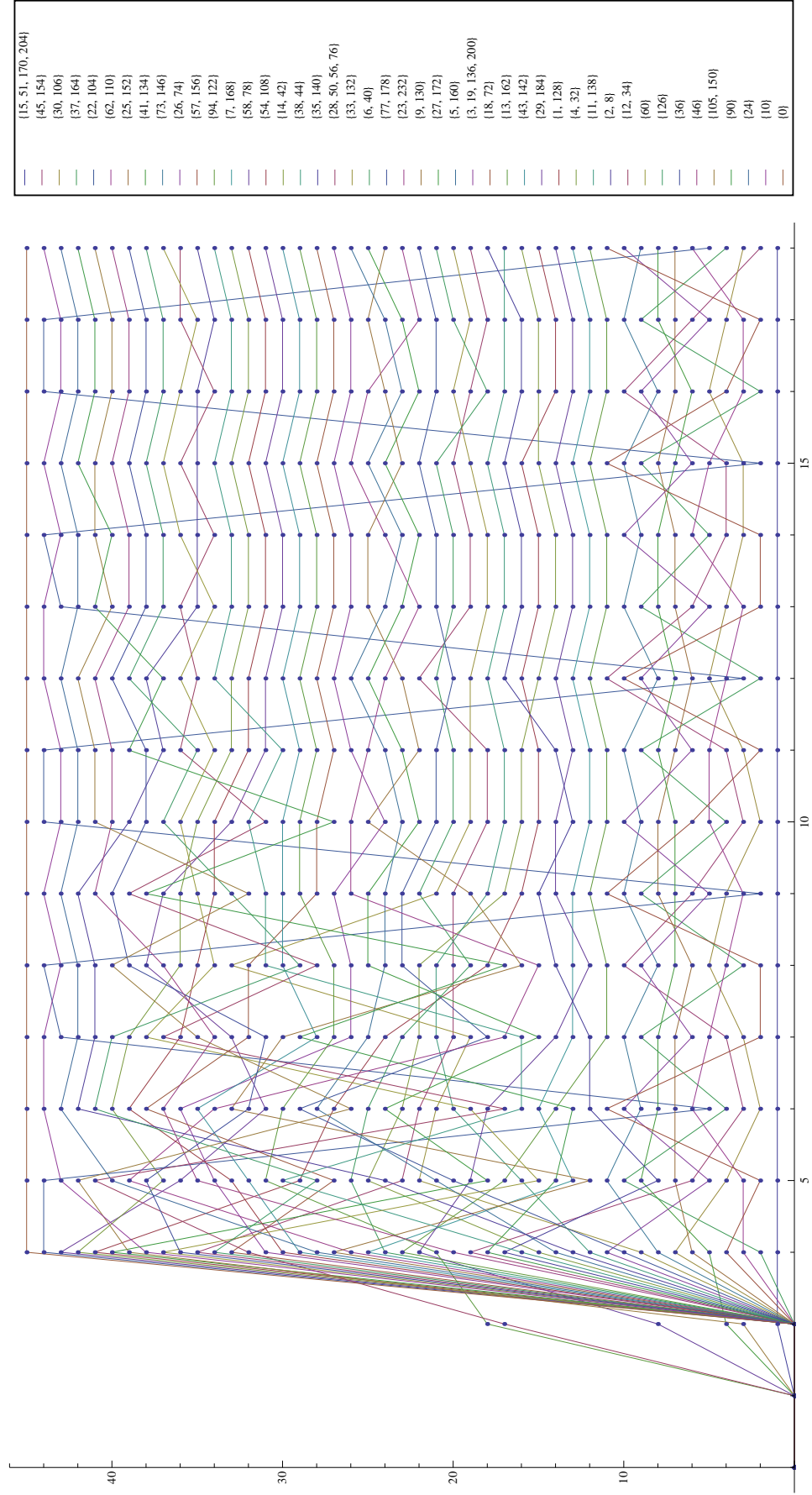


Figura 4.1: Posição de cada conjunto de regra para todo tamanho de reticulado  $n_{max}$  de 1 até 18, considerando o modelo de ordenação direta.

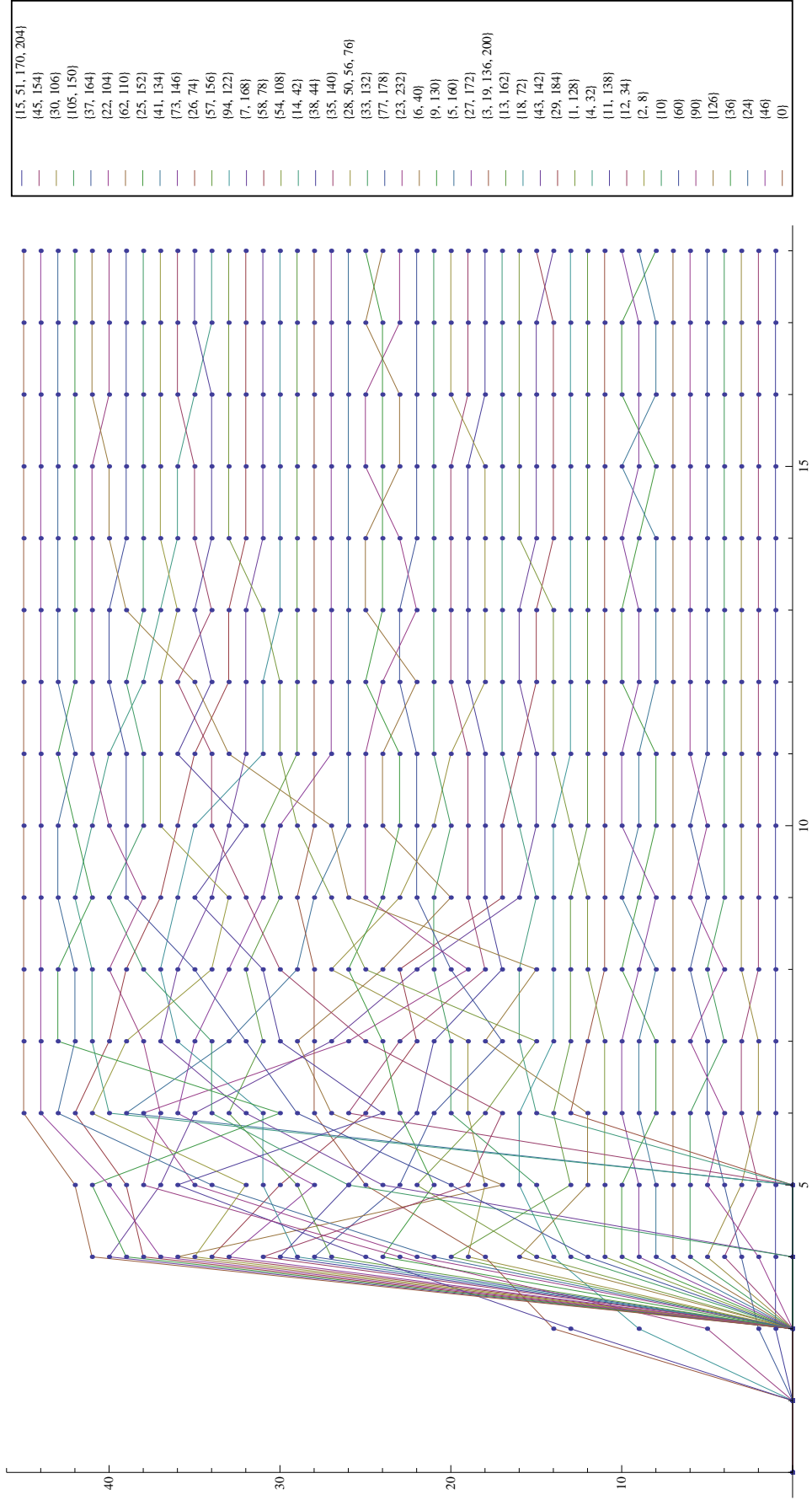


Figura 4.2: Posição de cada conjunto de regra para todo tamanho de reticulado  $n_{max}$  de 1 até 18, considerando o modelo de ordenação absoluta.

### 4.3 Relacionando a reversibilidade parcial com parâmetros dos ACs

Modelar a reversibilidade parcial utilizando um simples cálculo pode trazer uma grande vantagem em termos computacionais. Assim como mencionado antes, o método apresentado em [Wolfram, 2002] não atende as expectativas para que possa ser utilizado como base para uma medida empírica quantitativa. Naturalmente, um candidato para um modelo, assim como as abordagens sugeridas na Seção 2.3, poderia ser baseado em alguns parâmetros dos ACs, em que, seus valores poderiam ser trabalhados, incluindo a possibilidade de retirá-los diretamente da tabela de transição.

Contudo, o objetivo de encontrar algum parâmetro que se mostrasse como um candidato válido deve conter a restrição de que estes parâmetros tenham a capacidade de gerar conjuntos de regras, agrupadas por seus respectivos valores, que não comprometam os conjuntos gerados pelos modelos de ordenação lexicográficos, assumindo-os como os mais adequados (através do modelo de ordenação absoluta). Em outras palavras, cada parâmetro eleito como candidato não pode “quebrar” os conjuntos de regras obtidos através do modelo de ordenação absoluta.

Os parâmetros eleitos para este objetivo, são aqueles que foram discutidos (e, alguns deles analisados) previamente:  $Z$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$  e  $\alpha^p$ ; assim como outros parâmetros da literatura, de acordo com [Oliveira, de Oliveira e Omar, 2001], relacionados ao comportamento dinâmico dos autômatos celulares:  $\lambda$ , sensibilidade, atividade absoluta, domínio da vizinhança e propagação de atividade.

Com os parâmetros relacionados ao comportamento dinâmico, a sensibilidade e o  $\lambda$  apresentaram “quebra” somente no conjunto  $\{3, 19, 136, 200\}$ . Enquanto que para os outros parâmetros (domínio da vizinhança, atividade absoluta e propagação de atividade) quase todos os conjuntos de regras foram “quebrados”, o que não apresenta nenhuma novidade, já que todos esses parâmetros não possuem nenhuma similaridade entre os conjuntos gerados e aqueles gerados pelos modelos de ordenação.

Com os outros parâmetros, somente  $\alpha^p$  mostrou que nenhum conjunto foi “quebrado”, contudo, a quantidade de conjuntos gerados por ele é muito menor do que os gerados pelos modelos, significando que ele também não possui nenhuma similaridade com os conjuntos gerados pelos modelos de ordenação.

Para os parâmetros  $\alpha$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ , todos mostraram que somente um conjunto (o  $\{3, 19, 136, 200\}$  novamente) do modelo de ordenação absoluta foi desfeito. Finalizando, para o

parâmetro  $Z$ , dois conjuntos do modelo foram desfeitos,  $\{28, 50, 56, 76\}$  e, novamente,  $\{3, 19, 136, 200\}$ . A Tabela 4.3 mostra os conjuntos gerados pelos parâmetros  $\alpha^p$ ,  $\alpha$  e  $Z$ , respectivamente, com as regras dos conjuntos desfeitos em negrito.

Tabela 4.3: Conjuntos de regras do espaço elementar gerados por  $\alpha^p$ ,  $\alpha$  e  $Z$ .

Regras	$\alpha^p$	Regras	$\alpha$	Regras	$Z$
{15, 27, 29, 43, 45, 51, 57, 77, 142, 154, 156, 170, 172, 178, 184, 204}	0.125	{15, 30, 45, 51, 60, 90, 105, 106, 150, 154, 170, 204}	0.125	{0}	0
{10, 12, 24, 34, 36, 46, 58, 60, 78, 90}	0.25	{35, 43, 140, 142}	0.25	{1, 2, 4, 8, 32, 128}	0.25
{11, 13, 14, 25, 26, 28, 35, 37, 38, 42, 44, 50, 56, 74, 76, 138, 140, 152, 162, 164}	0.375	{29, 184}	0.3125	<b>{3, 5, 6, 9, 10, 12, 18, 23, 24, 29, 33, 34, 36, 40, 43, 46, 72, 77, 126, 130, 132, 136, 142, 160, 178, 184, 232}</b>	0.5
{23, 105, 150, 232}	0.5	{27, 46, 57, 156, 172}	0.375	<b>{19, 35, 50, 76, 140, 200}</b>	0.625
{3, 5, 7, 9, 19, 33, 41, 73, 130, 132, 134, 136, 146, 160, 168, 200}	0.625	{23, 77, 178, 232}	0.40625	<b>{7, 11, 13, 14, 22, 25, 26, 27, 28, 37, 38, 41, 42, 44, 54, 56, 57, 58, 62, 73, 74, 78, 94, 104, 108, 110, 122, 134, 138, 146, 152, 156, 162, 164, 168, 172}</b>	0.75
{2, 4, 6, 8, 18, 30, 32, 40, 54, 62, 72, 94, 106, 108, 110, 122}	0.75	{7, 168}	0.4375	{15, 30, 45, 51, 60, 90, 105, 106, 150, 154, 170, 204}	1
{0, 1, 22, 104, 126, 128}	1	{13, 28, 50, 56, 76, 162}	0.46875		
		{26, 41, 54, 58, 74, 78, 108, 134}	0.5		
		{11, 138}	0.53125		
		{38, 44, 62, 110}	0.5625		
		{9, 14, 22, 33, 37, 42, 104, 130, 132, 164}	0.59375		
		{6, 18, 40, 72}	0.625		
		<b>{19, 73, 146, 200}</b>	0.65625		
		<b>{3, 36, 126, 136}</b>	0.6875		
		{25, 94, 122, 152}	0.71875		
		{2, 5, 8, 10, 160}	0.75		
		{12, 24, 34}	0.8125		
		{1, 128}	0.84375		
		{4, 32}	0.90625		
		{0}	1		

Um fato intrigante aparece ao investigar um possível motivo para que o conjunto de regras  $\{3, 19, 136, 200\}$  fosse desfeito em vários casos. Tomando a regra 3 como representante do conjunto, seu *padrão de reversibilidade* com  $n_{max} = 15$  mostra um comportamento peculiar. A Tabela 4.4 exemplifica a situação, onde, cada coluna está relacionada ao *padrão de reversibilidade* associado a um tamanho de reticulado  $n$ . Mais precisamente, para

um determinado  $n$ , cada célula da tabela exibe o número de CIs de tamanho  $n$  que possuem um certo número de pré-imagens. Estas duas quantidade são, respectivamente, os números aparecendo em cada linha, na forma: *número de CIs*[*número de pré-imagens*]. Portanto, por exemplo, com reticulado de tamanho 15 (coluna 1), existe 1364 CIs com somente uma pré-imagem (linha 1), 960 CIs com 2 pré-imagens cada (linha 2), etc.

Tabela 4.4: Número de configurações iniciais de tamanho  $n$  que possuem uma certa quantidade de pré-imagens, para a regra elementar 3.

Tamanho do reticulado ( $n$ )														
15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
1364[1]	841[1]	521[1]	324[1]	199[1]	121[1]	76[1]	49[1]	29[1]	16[1]	11[1]	9[1]	4[1]	1[1]	2[1]
960[2]	560[2]	325[2]	180[2]	99[2]	60[2]	36[2]	16[2]	7[2]	6[2]	5[2]	1[7]	1[4]	1[3]	
600[3]	350[3]	195[3]	108[3]	66[3]	40[3]	18[3]	8[3]	7[3]	6[3]	1[11]				
180[4]	91[4]	39[4]	18[4]	11[4]	5[4]	9[5]	8[5]	7[5]	1[18]					
375[5]	210[5]	117[5]	72[5]	44[5]	20[5]	9[8]	8[8]	1[29]						
195[6]	84[6]	39[6]	24[6]	11[6]	10[8]	9[13]	1[47]							
230[8]	126[8]	78[8]	48[8]	22[8]	10[13]	1[76]								
45[9]	21[9]	13[9]	6[9]	11[13]	10[21]									
90[10]	42[10]	26[10]	12[10]	11[21]	1[123]									
135[13]	84[13]	52[13]	24[13]	11[34]										
45[15]	28[15]	13[15]	12[21]	1[199]										
45[16]	28[16]	13[16]	12[34]											
90[21]	56[21]	26[21]	12[55]											
30[24]	14[24]	13[34]	1[322]											
15[25]	7[25]	13[55]												
30[26]	14[26]	13[89]												
60[34]	28[34]	1[521]												
15[39]	14[55]													
15[40]	14[89]													
15[42]	14[144]													
30[55]	1[843]													
15[89]														
15[144]														
15[233]														
1[1364]														

Desta forma, extraído da tabela, para cada tamanho de reticulado, o maior número de pré-imagens associada com qualquer configuração inicial, ou seja, o número de pré-imagens da maior CI não reversível para cada tamanho de reticulado; na notação da tabela, são aqueles que possuem a forma  $1[\text{número}]$  para reticulados de tamanho 2 até 15, e o  $2[1]$  para o reticulado de tamanho 1. Como resultado, a seguinte sequência numérica é gerada, do menor reticulado para o maior: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364.



Acontece que estes números constituem exatamente os números de Lucas, uma série numérica de inteiros semelhante a conhecida sequência de Fibonacci [Weisstein, 1995b]; mais especificamente, o  $n$ -ésimo termo da sequência anterior é exatamente o  $n$ -ésimo número de Lucas, com  $n$  variando entre 1 e 15. O fato interessante é que esses números de Lucas parecem governar diretamente a quantidade de CIs menos reversíveis para cada reticulado, isto é, aqueles que possuem a maior quantidade de pré-imagens.

Os números de Lucas podem ser obtidos através de uma regra generalizada para sequências numéricas [Sloane, 1995], sendo ela a seguinte:

$$a(n) = a(n-1) + a(n-m), \quad (4.1)$$

com  $a(n) = 1$  para  $n = 1, \dots, m-1$  e  $a(m) = m+1$ . No caso dos números de Lucas, utiliza-se a Equação 4.1 com  $m = 2$ .

Igualmente impactante é o fato de que a sequência de números de CIs reversíveis também é governada pelos números de Lucas, embora não diretamente como antes. Considerando que  $s_n$  seja o número das maiores CIs reversíveis com reticulado de tamanho  $n$ , e  $L_n$  o  $n$ -ésimo número de Lucas,  $s_n$  é dado por:

$$s_n = \begin{cases} L_0 & \text{se } n = 1 \\ L_n & \text{se } n > 1 \text{ e } n \text{ for ímpar} \\ L_n - 2 & \text{se } n > 1 \text{ e } n \text{ for par e } n/2 \text{ for ímpar} \\ L_n + 2 & \text{se } n > 1 \text{ e } n \text{ for par e } n/2 \text{ for par} \end{cases} \quad (4.2)$$

Apesar de considerado como um fato isolado, o surgimento dos números de Lucas no que diz respeito às configurações iniciais, sejam elas reversíveis ou não, também foi observado em diferentes regras elementares após uma análise minuciosa.

Todos os conjuntos que sofreram alternância de posição a partir de  $n_{max} = 15$  no modelo de ordenação absoluta foram submetidos a esta mesma análise. Algumas ocorrências de sequências numéricas semelhantes também foram observadas, e, de alguma forma, certas regras também apresentaram relação com os números de Lucas, não diretamente, mas com a sua generalização [Sloane, 1995].

Dos casos observados, as regras 5, 23, 37 e 172 foram aquelas onde a relação apareceu mais evidente. No caso da regra elementar 5, as configurações iniciais não reversíveis com o maior número de pré-imagens para cada tamanho de reticulado, apresenta a mesma sequência gerada a partir da Equação 4.2, enquanto que as CIs reversíveis (com uma

única pré-imagem cada) possui uma série numérica muito semelhante.

Para a relação com a regra elementar 23, a sequência obtida para o caso das CIs não reversíveis com maior número de pré-imagens, revelou-se a mesma da Equação 4.1 porém, aqui,  $m = 3$ . Ainda, para a relação com a regra elementar 37, a sequência obtida, também, através das CIs não reversíveis com o maior número de pré-imagens, foi a da Equação 4.1 com  $m = 4$ .

A mesma relação também foi diagnosticada na regra elementar 172, todavia, neste caso, a sequência ocorre com as CIs reversíveis e utiliza uma variação da Equação 4.2. Especificamente no caso desta regra, [Fukš, 2010] observou um comportamento muito semelhante ao encontrar os mesmos números da sequência de Fibonacci e de Lucas ao apresentar um método de solução para o problema de valor inicial dos ACs.

Os números de Lucas já foram citados no contexto de sistemas dinâmicos discretos, mais especificamente em buscas de evolução da regra 150 a partir de alguns valores iniciais específicos [MacFarlane, 2009] e em sequências recursivas de números inteiros [Wolfram, 2002]. Contudo, nenhuma conexão foi estabelecida até este momento, na literatura, envolvendo esses números e o comportamento global das regras dos autômatos celulares.

A utilização de alguns parâmetros dos autômatos celulares para a construção de um modelo teórico mostrou a existência da possibilidade de combiná-los de tal maneira que seja possível apontar para regras de acordo com seu grau de reversibilidade. Apesar disso, não foi possível determinar efetivamente um conjunto de parâmetros que preenchesse esses requisitos.

Deste modo uma outra tentativa em diminuir o custo computacional encontrado ao utilizar os modelos lexicográficos deve ser avaliada: definir uma medida numérica capaz de ser obtida através do *padrão de reversibilidade* da regra. A descrição e discussão sobre as medidas propostas encontram-se na próxima Seção.

## 4.4 Medidas numéricas baseadas na noção de reversibilidade parcial

A ideia de medir a reversibilidade parcial de uma regra surgiu logo após a questão de como definir qual regra é “mais” parcialmente reversível do que outra. Assim como nos outros parâmetros mencionados anteriormente ( $Z$ ,  $\alpha$ , etc) o objetivo deste valor é

poder representar numericamente uma regra, neste caso, com relação a sua reversibilidade parcial. O triunfo que uma medida pode trazer para este caso são inúmeras, entre elas pode-se destacar a facilidade de manipulação e identificação de qual regra apresenta uma maior reversibilidade parcial do que outra.

A busca para obter um valor de medida (empírica) definitiva que representasse a reversibilidade parcial de uma regra com maior verossimilhança possível de acordo com o retorno de seu *padrão de reversibilidade* resultou em diferentes formas de cálculo.

Para avaliar a qualidade do número fornecido pelas medidas propostas e verificar o quão próximo elas estão da medida empírica, um gráfico, mostrando a ordenação das regras segundo a medida e a ordenação absoluta, é utilizado como meio de comparação. Estes gráficos mostram uma comparação entre a lista de conjuntos de regras ordenada a partir do número fornecido pela medida (linha tracejada) com o modelo de ordenação absoluta (linha contínua) com  $15 \leq n_{max} \leq 18$ .

Para auxiliar a formalização das medidas são necessárias algumas definições preliminares:

- $R$  é o *padrão de reversibilidade* de uma determinada regra, um multiconjunto contendo a informação de cada configuração inicial e sua quantidade de pré-imagens, para um tamanho de reticulado de 1 até  $n_{max}$ , ou seja,  $R = \{s_{n_{max}}, s_{n_{max}-1}, \dots, s_2, s_1\}$  com  $s_i$  representando um submulticonjunto de configurações iniciais e suas respectivas quantidades de pré-imagens com tamanho de reticulado  $i$ .
- $r^+$  é a união<sup>1</sup> de todos os submulticonjuntos de  $R$ , ou seja,  $r^+ = \uplus_{s_i \in R} s_i$ .
- $r$  é a união de todos os submulticonjuntos de  $R$  sem repetição de elementos, ou seja,  $r = \cup_{s_i \in R} s_i$ .
- $f_{req}(x, y)$  uma função que calcula a quantidade de ocorrências de  $x$  em um conjunto (ou submulticonjunto)  $y$ .

---

<sup>1</sup>Neste caso a operação de união é realizada sobre multiconjuntos e é efetuada da seguinte maneira:  $\{1, 1\} \uplus \{1, 2\} = \{1, 1, 1, 2\}$ .

**Medida 1.** A primeira forma utilizada como medida de grau de reversibilidade parcial surgiu da quantidade de configurações iniciais que possuem somente uma pré-imagem, ou seja, possuem valor igual a 1. Temos então que:

$$M_1 = f_{req}(1, r^+) \quad (4.3)$$

Aplicando esta medida sobre as regras mostradas no exemplo 2, obtemos os seguintes valores:

Regra	$M_1$ com $n_{max} = 4$	$M_1$ com $n_{max} = 15$
62	7	16571
44	10	8253
151	12	19490
223	11	968

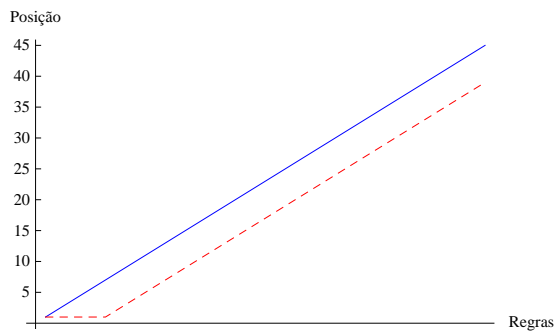
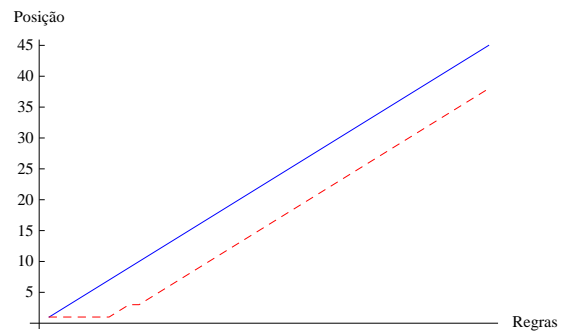
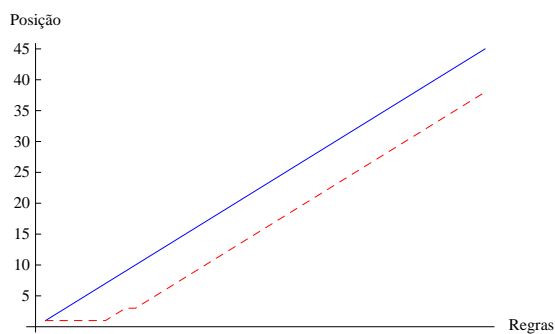
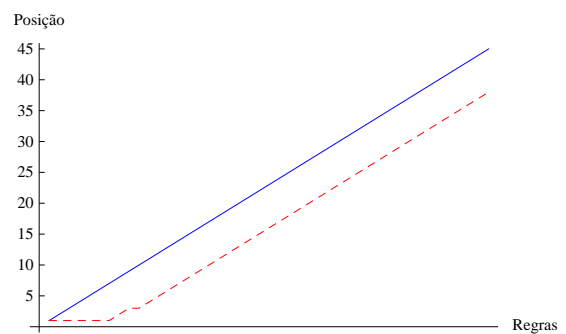
(a)  $n_{max} = 15$ (b)  $n_{max} = 16$ (c)  $n_{max} = 17$ (d)  $n_{max} = 18$ 

Figura 4.3: Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 1.

**Medida 2.** A segunda forma utilizada como medida de grau de reversibilidade parcial, a primeira utilizando uma ponderação para cada tamanho de reticulado, surgiu da soma da quantidade de configurações iniciais que possuem somente uma pré-imagem (valor 1) elevada ao tamanho do reticulado desta configuração. Temos então:

$$M_2 = \sum_{s_i \in R} f_{req}(1, s_i)^i \quad (4.4)$$

Utilizando as regras mostradas no exemplo 2 obtemos os seguintes valores:

Regra	$M_2$ com $n_{max} = 4$	$M_2$ com $n_{max} = 15$
62	283	16889412241185930508190279177279112475148229744596823217749
44	472	127884899723166137351501030536143870761632602478421463
151	10004	186235649255791502958115400643555561135166483465289495165278
223	1327	21294541937942526139417886208385086958

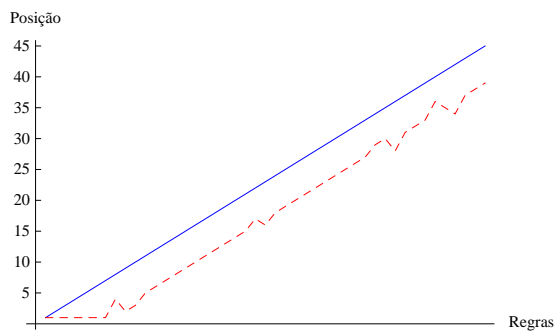
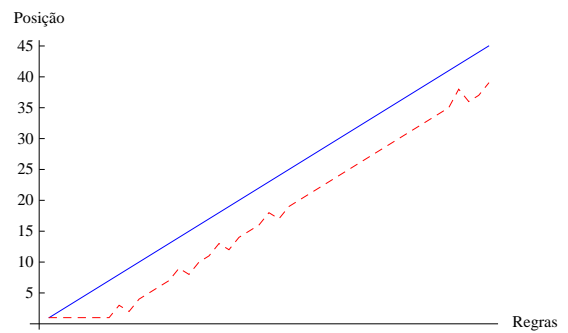
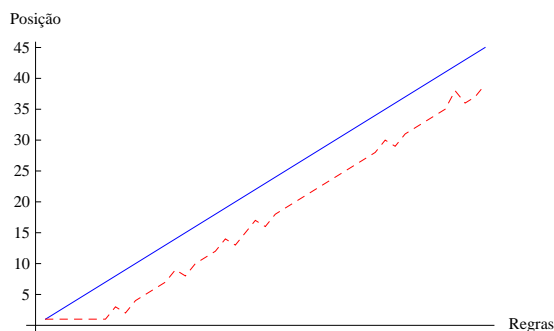
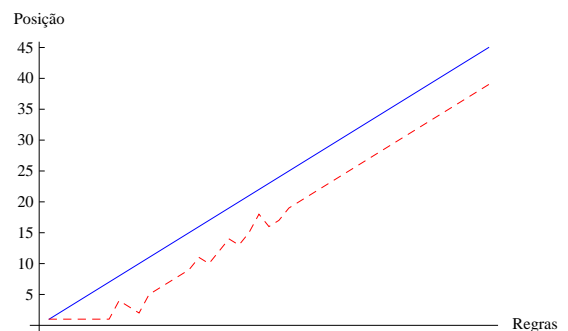
(a)  $n_{max} = 15$ (b)  $n_{max} = 16$ (c)  $n_{max} = 17$ (d)  $n_{max} = 18$ 

Figura 4.4: Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 2.

**Medida 3.** A terceira forma utilizada como medida de grau de reversibilidade parcial, a segunda utilizando uma ponderação para cada tamanho de reticulado, surgiu da soma da quantidade de configurações iniciais que possuem somente uma pré-imagem (valor 1) multiplicada pelo tamanho do reticulado desta configuração. Temos então:

$$M_3 = \sum_{s_i \in R} f_{req}(1, s_i) i \quad (4.5)$$

Utilizando as regras mostradas no exemplo 2 obtemos os seguintes valores:

Regra	$M_3$ com $n_{max} = 4$	$M_3$ com $n_{max} = 15$
62	25	229393
44	34	112560
151	44	270716
223	37	12503

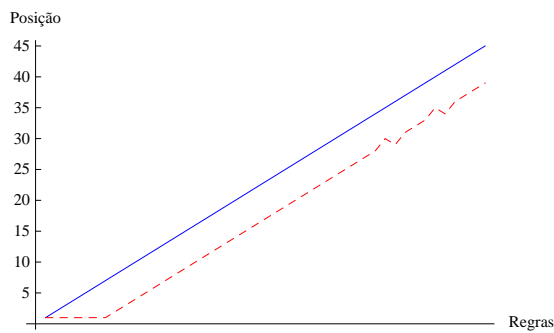
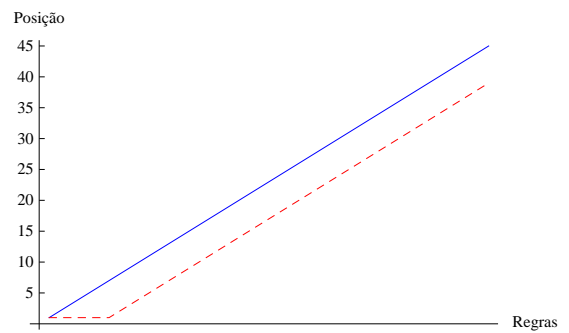
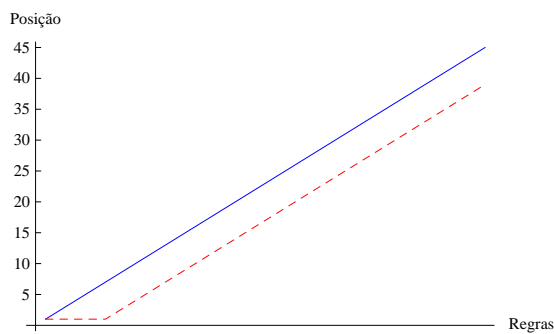
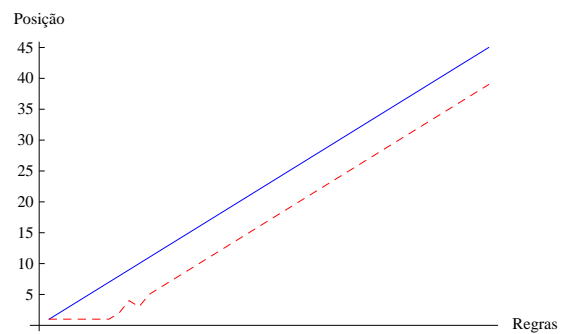
(a)  $n_{max} = 15$ (b)  $n_{max} = 16$ (c)  $n_{max} = 17$ (d)  $n_{max} = 18$ 

Figura 4.5: Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 3.

**Medida 4.** Nesta tentativa, a medida leva em consideração todas as configurações iniciais, sem distinção entre quais são reversíveis e quais não são; e, faz a soma de todas elas, sendo cada uma elevado a  $-1$ . Temos então:

$$M_4 = \sum_{x \in r^+} x^{-1} \quad (4.6)$$

Utilizando as regras mostradas no exemplo 2 obtemos os seguintes valores:

Regra	$M_4$ com $n_{max} = 4$	$M_4$ com $n_{max} = 15$
62	12.3333	21971
44	15	12004.7
151	13.7	24194.3
223	12.3	1551.59

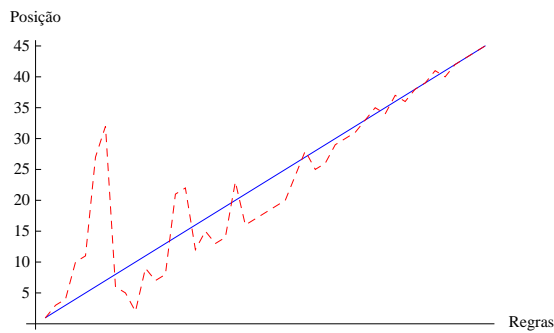
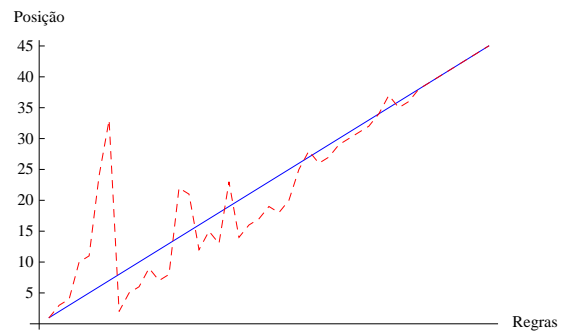
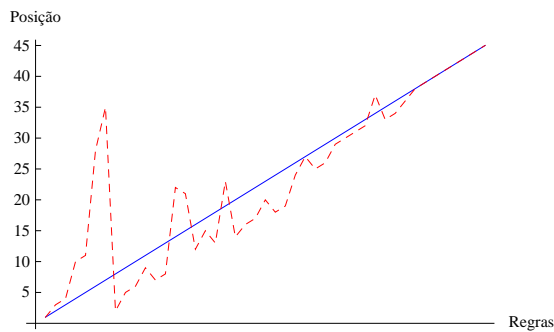
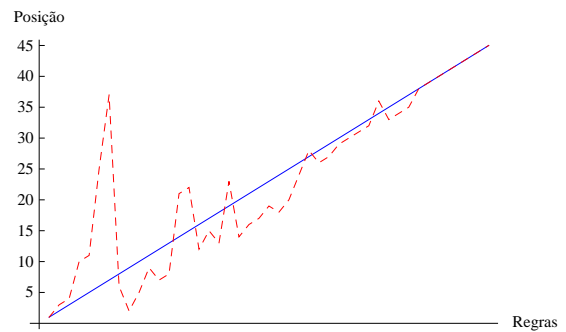
(a)  $n_{max} = 15$ (b)  $n_{max} = 16$ (c)  $n_{max} = 17$ (d)  $n_{max} = 18$ 

Figura 4.6: Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 4.

**Medida 5.** Esta medida envolve a utilização de uma fração contínua da quantidade total de ocorrência dos diferentes valores de pré-imagens das configurações iniciais dentro do *padrão de reversibilidade*.

Seja  $d$  o conjunto da quantidade de ocorrência de cada diferente valor de pré-imagem das configurações iniciais, ou seja,  $d = \{f_{req}(y, r^+) : y \in r\}$ . Temos então:

$$M_5 = d_1 + \frac{1}{d_2 + \frac{1}{d_3 + \dots}} \quad (4.7)$$

Utilizando as regras mostradas no exemplo 2 obtemos os seguintes valores:

Regra	$M_5$ com $n_{max} = 4$	$M_5$ com $n_{max} = 15$
62	7.09091	16571
44	10.1	8253
151	12.375	19490
223	11.4	968.001

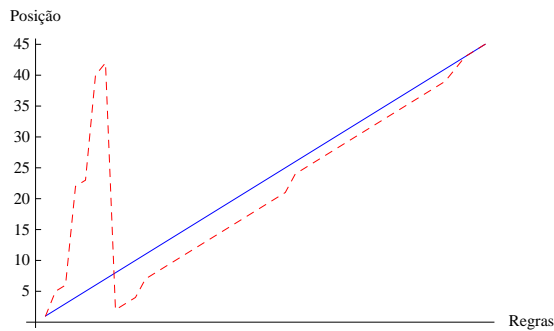
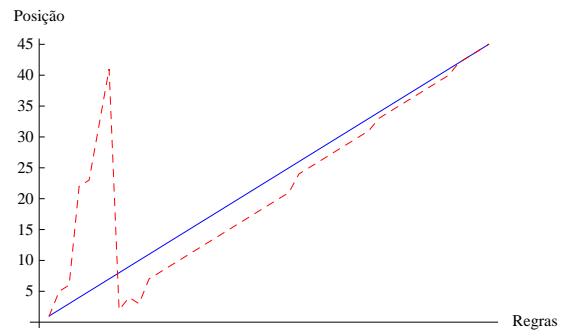
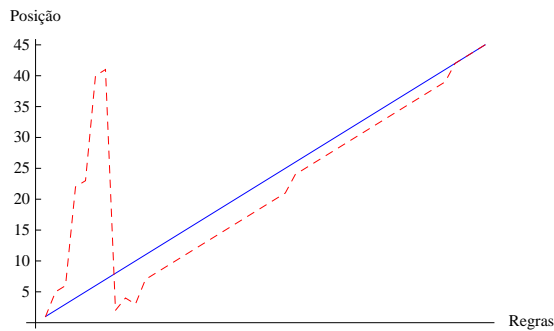
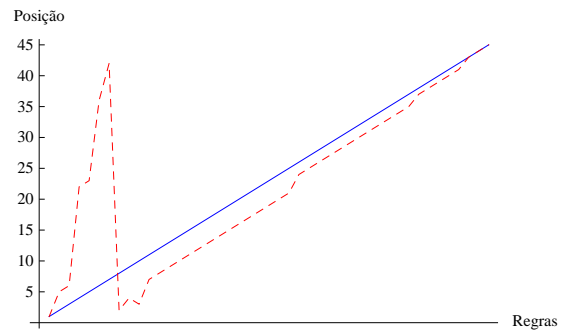
(a)  $n_{max} = 15$ (b)  $n_{max} = 16$ (c)  $n_{max} = 17$ (d)  $n_{max} = 18$ 

Figura 4.7: Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 5.



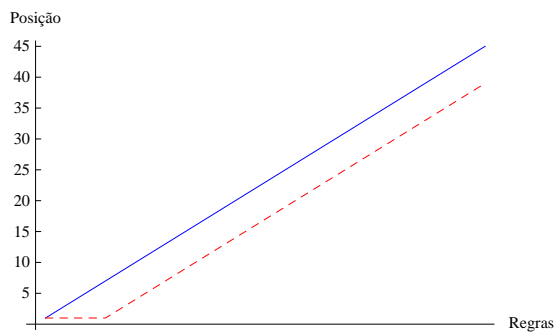
**Medida 6.** Nesta tentativa, o objetivo foi obter um valor que chegasse o mais próximo possível do modelo de ordenação absoluta. Desta forma, a medida calculada deve levar em consideração a diferença entre a quantidade de configurações iniciais reversíveis e a soma das configurações iniciais não reversíveis multiplicada pela sua frequência.

Seja  $N$  um conjunto contendo todas as configurações iniciais com mais de uma pré-imagem, ou seja,  $N = \{x \in r : x \neq 1\}$ .

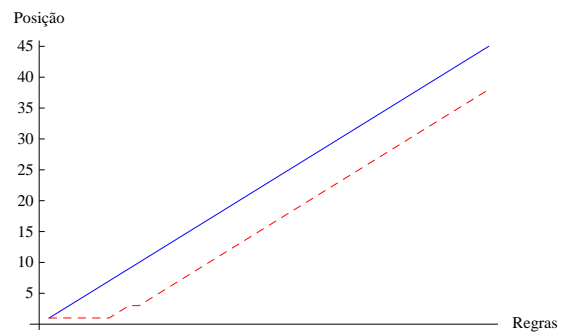
$$M_6 = freq(1, r^+) - \sum_{y \in N} freq(y, r^+)y \quad (4.8)$$

Utilizando as regras mostradas no exemplo 2 obtemos os seguintes valores:

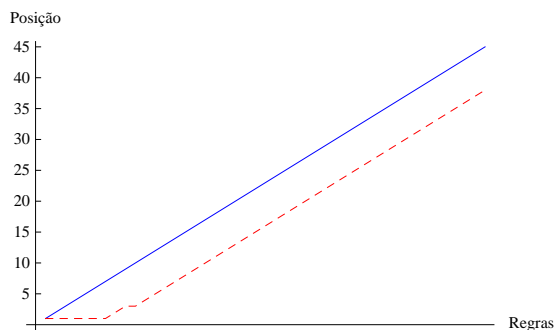
Regra	$M_6$ com $n_{max} = 4$	$M_6$ com $n_{max} = 15$
62	-16	-32392
44	-10	-49028
151	-6	-26554
223	-8	-63598



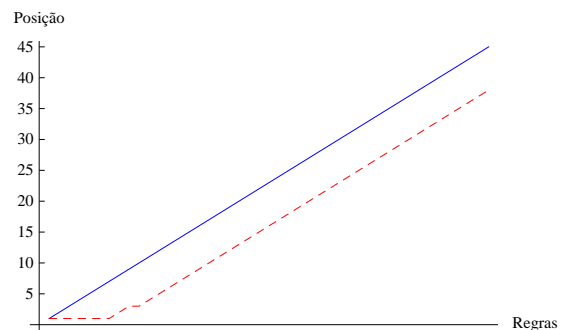
(a)  $n_{max} = 15$



(b)  $n_{max} = 16$



(c)  $n_{max} = 17$



(d)  $n_{max} = 18$

Figura 4.8: Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 6.

Assim como a medida empírica dos modelos de ordenação, todas as medidas propostas anteriormente “sofrem do mesmo mal”, elas não levam em consideração as configurações do tipo GoE, o que pode significar que, não condizem com a verdade, pois, quanto mais configurações do tipo GoE uma regra possuir menos reversível ela poderá ser.

Desta forma, uma medida que levasse em consideração também todas as configurações do tipo GoE e que representasse melhor a reversibilidade parcial foi proposta. Ela é descrita a seguir:

**Medida 7.** Esta medida tenta “consertar” a falha que as medidas anteriores mostraram; considerar as configurações *Garden-of-Eden* no cálculo. Desta forma ela realiza a subtração entre a quantidade de configurações iniciais reversíveis, a quantidade de configurações iniciais não reversíveis e a quantidade de configurações iniciais do tipo GoE.

Seja  $N$  um conjunto contendo todas as configurações iniciais com mais de uma pré-imagem, ou seja,  $N = \{x \in r : x \neq 1\}$  e  $G$  a quantidade de configurações iniciais do tipo GoE. Temos então:

$$M_7 = freq(1, r^+) - \left( \sum_{y \in N} freq(y, r^+) \right) - G \quad (4.9)$$

Utilizando as regras mostradas no exemplo 2 obtemos os seguintes valores:

Regra	$M_7$ com $n_{max} = 4$	$M_7$ com $n_{max} = 15$
62	-28	-66970
44	-20	-94132
151	-19	-60092
223	-23	-125564

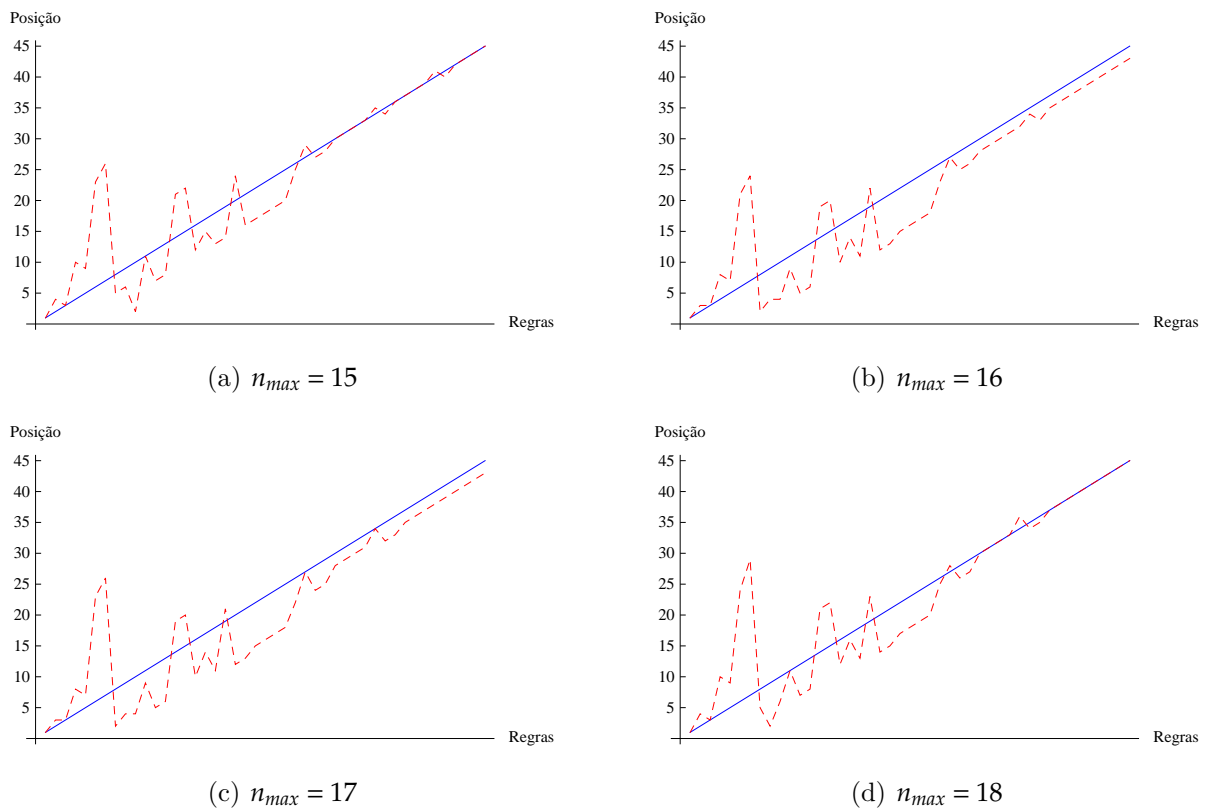


Figura 4.9: Diferença de posição dos conjuntos de regras entre a ordenação absoluta e a Medida 7.

Essas medidas numéricas propostas mostraram que é possível representar a noção de reversibilidade parcial através de uma outra perspectiva. No entanto, atualmente não é possível eleger uma que possa ser considerada a melhor. Contudo é possível apontar para algumas que apresentaram um resultado mais favorável e que podem ser exploradas como medidas numéricas. Além da possibilidade de agrupar estas medidas em classes, de acordo com as operações realizadas e com as configurações iniciais envolvidas.

Em geral as Medidas 1, 2, 3 e 6 mostraram uma ordenação muito parecida com o modelo de ordenação absoluta e podem ser consideradas aquelas que mais se aproximaram do objetivo proposto.

## 5 Conclusão

Este trabalho mostrou como definir uma noção de reversibilidade parcial dos autômatos celulares, mais especificamente dos ACs elementares. O principal foco foi direcionado na realização de diversas comparações entre as regras de maneira que a noção proposta ficasse evidente.

Os experimentos realizados ao longo do capítulo 3 descrevem uma possível relação de alguns parâmetros dos autômatos celulares com a propriedade de reversibilidade das regras. Eles mostraram que os parâmetros  $\alpha$ ,  $Z$  e uma medida de reversibilidade (calculado a partir do procedimento descrito em [Wolfram, 2002] para testar se uma determinada regra é reversível ou não) estão correlacionados. Eles também revelaram alguns indícios de regras apresentando características semelhantes às regras reversíveis, o que, a princípio, seriam regras que encaixariam-se na classe de regras parcialmente reversíveis. Este foi o primeiro passo para uma definição mais concreta da noção de reversibilidade parcial.

O desenvolvimento de uma representação para a quantidade de pré-imagens de cada configuração possível de uma determinada regra num tamanho de reticulado específico, denominado de *padrão de reversibilidade*, permitiu que outros diversos experimentos fossem realizados para que a definição da noção fosse concretizada e assim formalizada.

Ao criar um modelo lexicográfico de ordenação para as regras, de acordo com a quantidade de pré-imagens de suas configurações iniciais, mostra-se que é possível apontar para uma regra mais (parcialmente) reversível do que outra. Todos os experimentos realizados envolvendo esta medida empírica, especificamente o modelo de ordenação absoluta, mostraram claramente que os limites de testes sugeridos por [Wolfram, 2002] (com  $n_{max} = 4$  e  $n_{max} = 15$ , para o caso do espaço elementar) não são suficientes para estabelecer a reversibilidade parcial de uma regra, o que pode ser observado através das Figuras 4.2 (para a ordenação absoluta) e 4.1 (para a ordenação direta).

Estes mesmos experimentos possibilitaram particionar o espaço das regras elementares em 45 conjuntos de regras de reversibilidade equivalente. Embora isto talvez venha ser

considerado verdadeiro para o caso de um reticulado de tamanho infinito, é algo que não pode ser afirmado neste momento. Para tanto, uma dificuldade imposta por uma constatação teórica, derivada do fato de que a reversibilidade sobre uma condição de contorno periódica não é suficiente para garantir a reversibilidade de uma regra sobre um reticulado sem restrições, deve ser superada [Kari, 2005]. Como isto aplica-se para qualquer espaço celular, a mesma dificuldade seria encontrada para generalizar a noção definida neste trabalho.

Ao relacionar a reversibilidade parcial com parâmetros dos autômatos celulares, incluindo aqueles derivados da tabela de transição, os experimentos mostraram (novamente) que  $Z$  e  $\alpha$  (neste caso, incluindo também suas variações  $\alpha^p$ ,  $\alpha_2$  e  $\alpha_3$ ) possuem uma correlação com a reversibilidade parcial. Portanto, parece ser possível utilizá-los, combinando-os, de maneira que possam evidenciar algum tipo de reversibilidade parcial.

Os estudos realizados sobre a definição de uma medida numérica que permitisse o cálculo da reversibilidade parcial de uma regra elementar e que pudesse ser utilizada com um custo muito menor do que a medida empírica lexicográfica, apesar de não elegerem uma que pudesse efetivamente ser utilizada, ao menos mostraram os mesmos 45 conjuntos de regras de reversibilidade equivalente, exceto nas medidas 1, 2, 3 e 6, além de auxiliarem numa resposta sobre a questão da utilização ou não das configurações do tipo *Garden-of-Eden* na construção desta medida. A utilização destas configurações deveria, em princípio, fazer parte da medida de reversibilidade parcial, porém, assim como utilizá-las nas medidas lexicográficas estudadas seria redundante, a inserção delas no cálculo da medida também não trouxe nenhum benefício para a resposta.

A noção de reversibilidade parcial apresentada neste trabalho, além da possibilidade de utilizá-la para realizar buscas evolutivas de autômatos celulares reversíveis ou ACs que realizem tarefas de acordo com a sua reversibilidade, também mostra algumas informações revelando propriedades interessantes, aparentemente desconhecidas até então, envolvendo a reversibilidade de algumas regras elementares, tais como as regras 105 e 3. Apesar de [de Oliveira e Freitas, 2010] não terem detectado que os números de Lucas encontrados nas configurações iniciais com o maior número de pré-imagens na regra elementar 3, já foram referenciados na literatura, no contexto do comportamento global de autômatos celulares ou as regras elementares, verificou-se posteriormente a ocorrência de alguns trabalhos recentes citando os mesmos números, como [MacFarlane, 2009], mesmo no contexto de pré-imagens, como é o caso de [Fukš, 2010].

Desta forma, algumas questões ainda precisam ser respondidas de maneira que auxi-

liem a melhorar a definição da noção proposta neste trabalho:

- Qual seria o limite  $n_{max}$  realmente aplicável para este tipo de problema ou será que existe um valor maior mais confiável?
- As medidas empíricas numéricas mostraram que é possível criar uma noção da reversibilidade parcial de uma regra a partir de outra perspectiva. Será esta a maneira mais indicada do que a medida empírica dos modelos lexicográficos?

Também deve-se entender melhor qual o real papel dos parâmetros dos autômatos celulares na definição da reversibilidade parcial, o que pode trazer algumas novidades, tal como o índice de que  $\alpha$  pode ser considerado como uma medida para indicar o grau de quão sobrejetor um AC pode ser.

Com a resposta destas questões e com a definição concreta da noção proposta, pode-se ainda pensar numa maneira de encontrar uma regra parcialmente reversível inversa, permitindo assim, a aplicação deste tipo de regras em aplicações como por exemplo na área de criptografia.

## *Referências*

- [Boykett, 2004] T. Boykett. Efficient exhaustive listings of reversible one dimensional cellular automata. *Theor. Comput. Sci.*, Elsevier Science Publishers Ltd., Essex, UK, v. 325, n. 2, p. 215–247, 2004. ISSN 0304-3975.
- [Culik, Hurd e Yu, 1990] K. Culik; L. P. Hurd; S. Yu. Computation theoretic aspects of cellular automata. *Phys. D*, Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, Netherlands, v. 45, n. 1-3, p. 357–378, 1990. ISSN 0167-2789.
- [Fukús, 2010] H. Fukús. Probabilistic initial value problem for cellular automaton rule 172. *ArXiv e-prints*, jul 2010.
- [Hedlund, 1969] G. A. Hedlund. Endomorphism and automorphism of the shift dynamical system. *Mathematical System Theory*, Springer New York, v. 3, n. 4, 1969. ISSN 1432-4350.
- [Jeras e Dobnikar, 2007] I. Jeras; A. Dobnikar. Algorithms for computing preimages of cellular automata configurations. *Physica D Nonlinear Phenomena*, v. 233, p. 95–111, sep 2007.
- [Kari, 1992] J. Kari. Cryptosystems based on reversible cellular automata. *preprint*, University of Turku, Finland, abr. 1992.
- [Kari, 2005] J. Kari. Theory of cellular automata: a survey. *Theor. Comput. Sci.*, Elsevier Science Publishers Ltd., Essex, UK, v. 334, n. 1-3, p. 3–33, 2005. ISSN 0304-3975.
- [MacFarlane, 2009] A. J. MacFarlane. On the evolution of the cellular automaton of rule 150 from some simple initial states. *Journal of Mathematical Physics*, American Institute of Physics, Melville, NY, EUA, v. 50, n. 6, 2009. ISSN 0022-2488.

- [Oliveira, de Oliveira e Omar, 2001] G. M. B. Oliveira; P. P. B. de Oliveira; N. Omar. Definition and applications of a five-parameter characterization of one-dimensional cellular automata rule space. *Artificial Life*, v. 7, n. 3, p. 277–301, 2001.
- [de Oliveira, 2010] P. P. B. de Oliveira. *Cellular automata package for Mathematica*. 2010. Software de distribuição restrita, disponibilizado pelo autor.
- [de Oliveira e Freitas, 2010] P. P. B. de Oliveira; R. Freitas. Relative partial reversibility of elementary cellular automata. In: N. Fatès; J. Kari; T. Worsch. (Ed.). *Proceedings of Automata 2010: 16th International Workshop on Cellular Automata and Discrete Complex Systems*. Nancy, França: [s.n.], 2010. p. 195 – 208
- [Powley, 2009] E. J. Powley. *Global properties of cellular automata*. Tese (Doutorado em Ciência da Computação) — University of York, York, 2009.
- [Schranks, 2009] A. Schranks. *Relacionando Autômatos Celulares Unidimensionais Conservativos e Reversíveis*. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) — Universidade Presbiteriana Mackenzie, São Paulo, 2009.
- [Seredynski, Pienkosz e Bouvry, 2004] M. Seredynski; K. Pienkosz; P. Bouvry. Reversible cellular automata based encryption. In: *Network and Parallel Computing (LNCS Series)*. [S.l.: s.n.], 2004. v. 3222, p. 411–418.
- [Sloane, 1995] N. J. A. Sloane. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. 1995. Publicado eletronicamente. Disponível em: <<http://www.research.att.com/~njas/sequences/A000204>>. Acesso em: 25 de março de 2010.
- [Toffoli e Margolus, 1990] T. Toffoli; N. H. Margolus. Invertible cellular automata: a review. *Phys. D*, MIT Press, Cambridge, MA, USA, p. 229–253, 1990.
- [Weisstein, 1995a] E. W. Weisstein. Correlation coefficient. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*, 1995. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/CorrelationCoefficient.html>>. Acesso em: 17 de junho de 2008.
- [Weisstein, 1995b] E. W. Weisstein. Lucas number. *MathWorld – A Wolfram Web Resource*, 1995. Disponível em: <<http://mathworld.wolfram.com/LucasNumber.html>>. Acesso em: 27 de março de 2010.



- [Wolfram, 2002] S. Wolfram. *A new kind of science*. Champaign, IL: Wolfram Media, 2002. 1197 p.
- [Wuensche, 1999] A. Wuensche. Classifying cellular automata automatically: finding gliders, filtering, and relating space-time patterns, attractor basins, and the  $z$  parameter. *Complex.*, John Wiley & Sons, Inc., New York, NY, USA, v. 4, n. 3, p. 47–66, 1999. ISSN 1076-2787.
- [Wuensche e Lesser, 1992] A. Wuensche; M. Lesser. *The Global Dynamics of Cellular Automata*. [S.l.]: Addison-Wesley, 1992. (Santa Fe Institute Studies in the Sciences of Complexity, Reference Vol 1). ISBN 0-201-55740-1.